COLORAÇÕES RESTRITAS DE GRAFOS

Gordana Manić

Mac 5701-Tópicos em ciência da computação

Relatório de estudos

Área de Concentração: Teoria dos Grafos

Orientador: **Paulo Feofiloff**

IME-USP — São Paulo — 28 de junho de 2001—

Resumo

Trataremos de coloração restrita (list coloring) de grafos, que é uma generalização do problema clássico de coloração de vértices. A generalização é obtida impondo-se restrições ao conjunto de cores disponíveis para cada vértice. Serão estudadas algumas técnicas de coloração restrita que combinam métodos combinatórios, algébricos e probabilísticos.

Inicialmente, exporemos resultados básicos e algumas aplicações da teoria estudada e enunciaremos alguns resultados envolvendo as relações entre coloração clássica e coloração restrita segundo o artigo seminal de Erdős, Rubin e Taylor. A seguir, trataremos de coloração restrita em grafos planares, apresentando resultados que utilizam métodos combinatórios de Thomassen e Gutner. Prosseguindo, descreveremos uma abordagem algébrica desenvolvida por Alon e Tarsi e apresentaremos algumas de suas aplicações, incluindo um resultado assintótico relacionado com a conhecida conjectura da coloração restrita de arestas. Mencionamos ainda uma prova da conjectura da coloração restrita de arestas para grafos completos de ordem ímpar, segundo Häggkvist e Janssen e para grafos bipartidos, de acordo com Galvin e Slivnik.

Palavras-Chave: Coloração de grafos, coloração restrita, list coloring, número cromático, número cromático restrito.

Sumário

1 Terminologia básica **2**

2 Coloração restrita: conceitos e resultados básicos **3**

2.1 Coloração restrita 3

2.2 Aplicações 4

2.3 k-coloração restrita 4

3 Complexidade computacional **5**

4 Relações entre coloração clássica e coloração restrita **5**

5 Coloração restrita de grafos planares **11**

6 Coloração restrita e orientações de grafos **17**

7 A conjectura da coloração restrita de arestas **26**

7.1 A conjectura da coloração restrita de arestas para duas classes de grafos 26

7.2 Limitantes superiores para o número aresta-cromático restrito 29

Referências Bibliográficas **30**

Introdução

O problema clássico de coloração de vértices em grafos se resume em encontrar uma função que associa a cada vértice do grafo uma cor, de modo que vértices adjacentes recebam cores distintas. Neste trabalho estudamos uma generalização deste problema que consiste em encontrar uma coloração de vértices em que a cor de cada vértice v pertence a um conjunto pré-especificado $L(v)$ de cores "permitidas". Ou seja, dado um grafo $G = (V_G, E_G)$ e um subconjunto $L(v)$ de $\mathbb{N}$ para cada vértice v, encontrar uma coloração c de vértices de G tal que $c(v) \in L(v)$ para cada $v \in V_G$.

O conceito de coloração restrita foi introduzido na segunda metade da década de 70 independentemente por Erdős, Rubin e Taylor [9] e Vizing [22]. Vizing iniciou seus estudos nesta área com a intenção de estudar coloração total em grafos, ou seja, encontrar o número mínimo de cores para colorir todos os vértices e arestas de modo que os elementos adjacentes ou incidentes recebam cores distintas. Erdős, Rubin e Taylor, por outro lado, tiveram como motivação a conjectura de Dinitz: dada uma matriz $M_{n\times n}$ cujas componentes são conjuntos com n elementos, é possivel escolher um elemento de cada conjunto de modo que os elementos escolhidos sejam distintos em cada linha e cada coluna. Ainda, em [9] foi dada uma caracterização dos grafos cujo número cromático restrito não passa de 2, uma estimativa para o número cromático restrito de grafos bipartidos aleatórios, uma prova do teorema de Brooks [8, p. 99] para coloração restrita e o enunciado de diversas conjecturas, algumas ainda em aberto.

Apesar de oferecer um número grande de problemas desafiadores, a área de coloração restrita começou a florescer somente na década passada, com a resolução da maioria das conjecturas enunciadas em [9], e vem crescendo desde então com o surgimento de novas questões, novas abordagens como, por exemplo, o uso de métodos algébricos e algumas aplicações em problemas de escalonamento e de atribuição de freqüências entre outras.

No restante da apresentação, fornecemos a notação e detalhamos os métodos combinatórios, algébricos e probabilísticos utilizados para o estudo de coloração restrita. A próxima seção contém a terminologia básica. Na seção 2, apresentamos as definições necessárias para tratar a teoria envolvendo coloração restrita, enunciamos resultados básicos envolvendo esta teoria e expomos algumas de suas aplicações segundo [9], [4] e [18]. A seguir tratamos, de modo breve, da complexidade computacional da teoria estudada. Na seção seguinte enunciamos alguns resultados envolvendo as relações entre coloração clássica e coloração restrita conforme [1], [8] e [9]. A seguir tratamos de coloração restrita em grafos planares de acordo com [13], [20] e [21]. Na seção 6 descrevemos a abordagem algébrica desenvolvida por Alon e Tarsi em [3] e damos uma aplicação desse método. Finalmente, na última seção tratamos da conhecida conjectura da coloração restrita de arestas, expondo uma prova para grafos bipartidos de acordo com [19]. Fazemos o uso combinado dos métodos probabilístico e algébrico para provar a conjectura citada para grafos completos de ordem ímpar e para provar uma versão enfraquecida desta mesma conjectura seguindo [14].

1 Terminologia básica

Um *grafo* é um par (V_G, E_G) de conjuntos finitos, com E_G um conjunto de pares não ordenados de elementos distintos de V_G. Os elementos de V_G são chamados *vértices*, e os elementos de E_G de *arestas*. Por brevidade, denotamos arestas $\{u, v\}$ por uv ou vu. Se $\alpha = uv$, dizemos que α *incide em* u e em v e que u e v são *extremos* de α. Também dizemos que u e v são *vizinhos* ou *adjacentes* e que u e v são *ligados* por α. Duas arestas distintas são ditas *adjacentes* se eles têm um extremo em comum.

A *ordem* de um grafo G, denotada por $|G|$, é o número de seus vértices. O *tamanho* de G é o número de suas arestas e será denotado por $\|G\|$.

O *grau* de um vértice v de um grafo G é o número de arestas incidentes em v e será denotado por $d_G(v)$. O *grau mínimo* de um grafo G é o número $\delta(G) := \min\{d_G(v) : v \in V_G\}$ e o *grau máximo* é o número $\Delta(G) := \max\{d_G(v) : v \in V_G\}$. O *grau médio* é o número $d(G) := \frac{1}{|G|}\sum_{v \in V_G} d_G(v)$.

Se todos os vértices de um grafo G com n vértices são dois a dois adjacentes dizemos que G é *completo* e o denotamos por K_n; K_3 é chamado *triângulo*.

Um grafo H é um *subgrafo* de um grafo G se $V_H \subseteq V_G$ e $E_H \subseteq E_G$, escrevemos $H \subseteq G$. Dizemos que H é um subgrafo *gerador* (*spanning subgraph*) de G se $H \subseteq G$ e $V_H = V_G$. Um subgrafo completo de um grafo é chamado de *clique*.

A *união* de dois grafos G e H, denotada por $G \cup H$, é o grafo $(V_G \cup V_H, E_G \cup E_H)$.

Se U é um subconjunto de V_G, a *vizinhança* de U, denotada por $\Gamma_G(U)$, é o conjunto dos vértices de $V_G \setminus U$ adjacentes a pelo menos um vértice de U. Se $U \subseteq V_G$, dizemos que uma aresta *incide em* U se ela tem pelo menos um extremo em U.

Se $U \subseteq V_G$, então o subgrafo de G *induzido* por U, denotado por $G[U]$, é o subgrafo de G cujo conjunto de vértices é U e cujo conjunto de arestas é o conjunto de arestas de G que têm ambos os extremos em U. Ainda, denotamos por $G - U$ o grafo $G[V_G \setminus U]$; para o caso em que $U = \{v\}$, abreviamos $G - \{v\}$ por $G - v$.

Um grafo é *bipartido* se V_G admite uma partição em duas classes de modo que cada aresta tem extremos em classes distintas; uma tal partição é chamada *bipartição* do grafo. Um grafo *bipartido completo* é um grafo bipartido no qual todo par de vértices de classes distintas é uma aresta. Denotamos por $K_{m,n}$ o grafo completo com bipartição (V_1, V_2) tal que $|V_1| = m$ e $|V_2| = n$.

O *grafo linha* (*line graph*) de um grafo G, denotado por $L(G)$, é o grafo com $V_{L(G)} := E_G$ e $\alpha_1\alpha_2 \in E_{L(G)}$ se e só se α_1 e α_2 são arestas adjacentes em G.

Um *caminho* é um grafo P com $V_P = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ não-vazio e os v_i todos distintos e $E_P = \{v_1v_2, v_2v_3, \ldots, v_{k-1}v_k\}$. Podemos representar um tal caminho por $v_1v_2 \ldots v_k$. Os vértices v_1 e v_k são os *extremos* do caminho. Se $P = v_1v_2 \ldots v_k$ é um caminho com $k \geq 3$, então $(V_P, E_P \cup \{v_kv_1\})$ é chamado de *circuito*. Um tal circuito pode ser representado por $v_1v_2 \ldots v_kv_1$. O *comprimento* de um caminho é o número de suas arestas; analogamente definimos o comprimento de um circuito. Dizemos que um caminho é *par* (resp. *ímpar*) se seu comprimento é par (resp. ímpar); analogamente definimos um circuito par e um circuito ímpar. A *cintura* de um grafo G, $g(G)$, é o comprimento do menor circuito em G. Dois caminhos são *internamente disjuntos* se não possuem vértices em comum, exceto os seus extremos.

Um grafo é *conexo* se para todo par de vértices distintos u e v contém um caminho com extremos u e v. Os subgrafos conexos maximais de um grafo são chamados *componentes*. Um grafo que não contém nenhum circuito é chamado de *acíclico*. Um grafo acíclico e conexo é chamado de *árvore*.

Um conjunto de vértices ou arestas dois a dois não adjacentes é chamado *independente*. Um conjunto independente de arestas de um grafo é chamado de *emparelhamento* (*matching*).

Quando G estiver subentendido, omitimos o índice $_G$. Por exemplo, em vez de V_G e E_G escrevemos simplesmente V e E.

Conjuntos com k elementos chamamos *k-conjuntos*.

2 Coloração restrita: conceitos e resultados básicos

Nessa seção damos as definições necessárias para tratar a teoria envolvendo coloração restrita, enunciamos resultados básicos envolvendo esta teoria e expomos de modo breve algumas suas aplicações.

2.1 Coloração restrita

Uma *cor* é um elemento de $\mathbb{N}$. Uma *lista de cores* é um subconjunto de $\mathbb{N}$. Denotamos por $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ o conjunto de todas as listas de cores.

Dado um grafo G e uma atribuição $L : V \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ de listas de cores aos vértices de G, uma *coloração restrita que respeita L* ou *L-coloração* (*list-coloring*) de G é uma função $c : V \to \mathbb{N}$ tal que $c(v) \in L(v)$ para todo $v \in V$ e $c(v) \neq c(u)$ se u e v são adjacentes. O conjunto $L(v)$ é chamado de *lista de cores permitidas de v*.

Se para cada vértice v de um grafo G a lista de cores permitidas $L(v)$ é suficiente grande, G admite uma L-coloração. É o que mostra o seguinte fato.

Fato 2.1

Se G é um grafo e L uma atribuição de listas de cores aos vértices de G com $|L(v)| \geq d(v) + 1$ para todo $v \in V$, então G admite uma L-coloração.

A prova do fato é o seguinte algoritmo guloso: para qualquer ordenação $v_1, v_2, \ldots, v_n$ dos vértices de G, colorimos cada vértice v_i com uma cor $c(v_i)$ de $L(v_i)$ tal que $c(v_i) \notin \{c(v_j) : j < i \text{ e } v_i v_j \in E_G\}$.

Em seguida, mostramos que o problema de coloração restrita em grafos completos corresponde ao problema de emparelhamento em grafos bipartidos.

Seja $G := K_n$ para algum $n \in \mathbb{N}$ e L uma atribuição de listas de cores aos vértices G. Definimos o grafo K com bipartição (A, B) com $A := V_G$, $B := \bigcup_{v \in V_G} L(v)$ e $vc \in E_K$ se e só se $c \in L(v)$. É claro que, G admite uma L-coloração se e somente se K possui um emparelhamento que cobre A. Portanto, L-coloração se reduz nesse caso a uma aplicação do teorema de Hall [8, p. 31]. A existência de L-coloração, nesse caso, não depende apenas da cardinalidade das listas de cores, como no fato 2.1.

2.2 Aplicações

Vamos expor duas aplicações de coloração restrita: a primeira em problemas de escalonamento e a segunda em problemas de atribuição de freqüências.

Um exemplo particular do problema de escalonamento pode ser obtido aplicando-se uma restrição ao problema citado em [4], encontrado na companhia aérea Húngara. A situação dada assemelha-se à seguinte: a companhia possui aviões de diversos tipos e trabalha com diferentes vôos. Cada vôo tem seu horário fixado de acordo com a temporada. Evidentemente, como toda companhia aérea, há um horário para a manutenção dos aviões, neste caso por uma escala semanal pré-determinada. A restrição é a de que cada vôo só pode ser realizado por certos tipos de aviões, esta restrição não consta em [4]. O problema é atribuir a cada vôo, numa temporada, um avião dentre os tipos que possam realizá-la e que não entre em conflito com a escala do setor de manutenção.

A representação em grafos do problema acima e o respectivo uso de coloração restrita se dá do seguinte modo: definimos o grafo $G = (V, E)$ tal que $V := \{J_1, J_2, \ldots, J_n\}$ sendo $J_1, J_2, \ldots, J_m$ as tarefas de manutenção, e $J_{m+1}, J_{m+2}, \ldots, J_n$ os vôos. $J_iJ_k \in E$ se e só se os horários correspodentes não são disjuntos. Colorir um vértice J_i corresponde à atribuição de um avião a tarefa J_i. Seja c uma atribuição de aviões aos vértices J_i, $1 \leq i \leq m$, seguido a escala semanal pré-determinada de manutenção. Para todo i, $m < i \leq n$, seja $L(J_i)$ lista de aviões que podem realizar o vôo J_i. Definimos para todo i, $m < i \leq n$ uma lista $L'(J_i) := L(J_i) \setminus \{c(J_k) : 1 \leq k \leq m, J_iJ_k \in E\}$. O problema de escalonamento, então corresponde ao problema de encontrar uma L'-coloração do grafo $G[\{J_{m+1}, J_{m+2}, \ldots, J_n\}]$.

Outra aplicação pode ser encontrada na atribuição de freqüências de transmissão de rádio e televisão. A situação dada em [18] assemelha-se à seguinte: suponha dado n transmissores numa região e que cada transmissor seja capaz de operar somente em determinadas freqüências. Como podem ocorrer interferências entre os transmissores, seja devido à proximidade geográfica ou a fatores meteorológicos, para cada par de transmissores t_i e t_j, que correm o risco de interferir é dado um número $l(t_it_j)$ que especifica a separação mínimo de freqüências para que a transmissão ocorra sem interferência. Isto é, se dois transmissores t_i e t_j correm o risco de interferir, então, as freqüências atribuídas a t_i e t_j diferem de pelo menos $l(t_it_j)$. O problema, então é encontrar uma atribuição de freqüências aos transmissores que satisfaça as limitações de interferências.

A formulação em grafos desse problema pode ser dada por: considere $G = (V, E)$ com V o conjunto de transmissores $\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ e $t_it_j \in E$ se e só se t_i e t_j correm o risco de interferir. O problema é, dadas as listas $L(t_i)$, $1 \leq i \leq n$, de freqüências permitidas e os números $l(t_it_j)$ para todo $t_it_j \in E$, encontrar uma L-coloração c de G que satisfaça $|c(t_i) - c(t_j)| \geq l(t_it_j)$ para toda aresta t_it_j de G.

2.3 k-coloração restrita

Dado um número inteiro positivo k, G *admite uma k-coloração restrita* (*is k-choosable*) se G possui uma L-coloração para toda atribuição L com $|L(v)| \geq k$ para todo $v \in V$. O *número cromático restrito* (*choice number*) de G, denotado por $\mathrm{ch}(G)$, é o menor k tal que G admite uma k-coloração restrita.

Um grafo G é *k-colorível* (no sentido clássico) se G admite uma L-coloração com $L(v) := \{1, 2, \ldots, k\}$ para todo vértice v de G. O *número crómatico* de G, $\chi(G)$, é o menor k

tal que G é k-colorível.

Segue da definição que para todo grafo G, $\mathrm{ch}(G) \geq \chi(G)$.

Ainda, como conseqüência do fato 2.1 temos que para todo grafo G, $\mathrm{ch}(G) \leq \Delta(G) + 1$.

A estimação de $\mathrm{ch}(G)$ dada em termos de $\Delta(G)$ é justa, pois se G é grafo completo ou um circuito ímpar, teremos $\mathrm{ch}(G) = \chi(G) = \Delta(G) + 1$. Ainda, em [9] encontramos a demonstração da seguinte generalização do conhecido teorema de Brooks [8, p. 99]: *se G é um grafo conexo, que não é completo e nem é circuito ímpar, então* $\mathrm{ch}(G) \leq \Delta(G)$.

Como se sabe, $\chi(G) \leq 2$ se e só se G não tem circuito ímpar. A situação é mais complexa para número cromático restrito.

Teorema 2.2 ([9])

Um grafo conexo G satisfaz $\mathrm{ch}(G) \leq 2$ *se e só se o centro de G é ou um vértice ou um circuito par ou um grafo que consiste de dois vértices e três caminhos pares internamente disjuntos entre eles, onde o comprimento de pelo menos dois desses caminhos é exatamente dois.*

Chamamos de *centro* de um grafo G o grafo obtido removendo-se os vértices de grau um, recursivamente, até não existirem mais vértices de grau um.

3 Complexidade computacional

De modo breve, discutimos a complexidade algorítmica dos seguintes problemas envolvendo coloração restrita.

- Problema 1: *Dado um grafo G e uma atribuição L de listas de tamanho k aos vértices de G, decidir se G admite uma L-coloração.*
- Problema 2: *Dado um grafo G e um número inteiro positivo k, decidir se* $\mathrm{ch}(G) \leq k$.

O problema de decidir se $\chi(G) \leq k$ é *NP*-completo [11]. Portanto o problema 1 também é *NP*-completo.

Cabe ressaltar que o problema 1 permanece *NP*-completo para a classe dos grafos bipartidos completos, conforme [15].

Por outro lado, o problema 2 é mais complexo pois não há razão para que esteja em *NP*. De acordo com [9], ele é co-Σ_2^p-completo ([11]).

4 Relações entre coloração clássica e coloração restrita

Nessa seção fazemos algumas comparações entre o número cromático e número cromático restrito.

Vimos na subseção 2.1 que todo grafo G satisfaz $\mathrm{ch}(G) \geq \chi(G)$.

Definimos o *número de coloração* (*coloring number*) de G, $\mathrm{col}(G)$, como sendo o menor número natural k tal que todo subgrafo de G contém um vértice de grau no máximo $k-1$. Todo grafo G satisfaz $\chi(G) \leq \mathrm{col}(G)$ [8, p. 98]. O teorema seguinte mostra que número de coloração é limitante superior também para o número cromático restrito. Isto é generalização do fato 2.1.

Teorema 4.1 ([8])
$\mathrm{ch}(G) \leq \mathrm{col}(G)$, *para todo grafo* G.

Demonstração.
A demonstração deste teorema é por indução na ordem de G.
Se $|G| = 1$ a afirmação do teorema é satisfeita trivialmente.
No passo de indução, supomos que G é um grafo com $|G| > 1$ e L uma atribuição de listas com pelo menos $k := \mathrm{col}(G)$ cores aos vértices de G. Por suposição, o grafo G contém um vértice v de grau no máximo $k-1$. Então v possui mais cores em sua sua lista que vizinhos. Portanto, G admite uma L-coloração se e só se $G - v$ admite uma L-coloração.
Pela hipótese de indução, $\mathrm{ch}(G-v) \leq \mathrm{col}(G-v)$. Ainda, $\mathrm{col}(G-v) \leq \mathrm{col}(G) = k$, e segue que $\mathrm{ch}(G-v) \leq k$. Portanto, $G - v$ admite uma L-coloração. Do fato acima, G admite uma L-coloração, o que implica a afirmação do teorema. □

O fato seguinte mostra que existem grafos tais que a diferença entre o número cromático e o número cromático restrito é arbitrariamente grande. Portanto, não existe limitação para o número cromático restrito em termos do número cromático clássico.

Fato 4.2 ([9])
Se k *é um número natural,* $k \geq 2$, *e* $m := \binom{2k-1}{k}$, *então* $\chi(K_{m,m}) = 2$ *e* $\mathrm{ch}(K_{m,m}) > k$.

Demonstração.
Podemos justificar o fato de $\mathrm{ch}(K_{m,m}) > k$ do seguinte modo: suponha que $\mathrm{ch}(K_{m,m}) \leq k$. Se $K_{m,m}$ é um grafo com bipartição (V_1, V_2) atribuimos cada k-subconjunto de um conjunto de $2k-1$ cores a um dos vértices de V_1 e a um dos vértices de V_2. Cada coloração de $K_{m,m}$ com listas assim definidas usa pelo menos k cores para colorir os vértices de V_1. Caso contrario, o k-conjunto de cores não usado para colorir os vértices de V_1 estaria associado a algum vértice de V_1. É claro que existe um vértice em V_2 cuja lista contem k cores usados para colorir vértices de V_1. Portanto, este vértice não pode ser colorido, contradição (figura 1). □

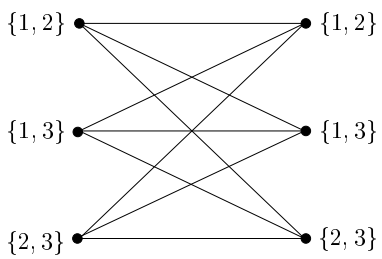

Figura 1: Exemplo para a afirmação 4.2, caso $k = 2$: $\mathrm{ch}(K_{3,3}) > 2$.

Existem grafos com número cromático 2 e com grau médio arbitrariamente grande, por exemplo, os grafos bipartidos completos. Em contraste, o teorema a seguir nos mostra que o número cromático restrito limita o grau médio. Logo vemos que o número cromático difere fundamentalmente do número cromático restrito.

Teorema 4.3 ([1])
Se G é um grafo, k um número natural e $d(G) > 4\binom{k^4}{k}\log(2\binom{k^4}{k})$, então $\mathrm{ch}(G) > k$.

Demonstração.
Inicialmente, mostramos que

G contém um subgrafo bipartido H com $\delta(H) \geq \frac{d(G)}{4}$.

G contém um subgrafo induzido G' com $\delta(G') \geq \frac{d(G)}{2}$ ([8, p. 6]). Seja H um subgrafo bipartido gerador de G' com número máximo de arestas. Suponha que existe $v \in V_H$ com $d_H(v) < \frac{d_{G'}(v)}{2}$. O grafo obtido deslocando v a outra classe de bipartição é um subgrafo bipartido gerador de G' com mais arestas do que H, contadição. Portanto, todo vértice $v \in V_H$ satisfaz $d_H(v) \geq \frac{d_{G'}(v)}{2}$. Logo, $\delta(H) \geq \frac{\delta(G')}{2} \geq \frac{d(G)}{4}$.

Seja então H um subgrafo bipartido de G com $\delta(H) \geq \frac{d(G)}{4}$ e com bipartição (A, B) onde $|A| \geq |B|$. Definimos o conjunto de cores $S := \{1, 2, \ldots, k^4\}$ e usando métodos probabilisticos provamos que existem subconjuntos $L(v) \subset S$ com $|L(v)| = k$ para todo $v \in V_H$, tais que a probabilidade de que H admite uma L-coloração é menor que um.

Para todo vértice $b \in B$, seja $L(b)$ um subconjunto aleatório de S com k elementos escolhido de modo uniforme e independentemente entre todos os $\binom{k^4}{k}$ subconjuntos de S com k elementos. Chamamos um vértice $a \in A$ *bom* (*good*) se, para todo subconjunto $C \subset S$ com $|C| = k$, existe um vizinho b de a em H com $L(b) = C$. Em seguida mostramos que

Para um fixo $a \in A$, a probabilidade de que a é um vértice bom é pelo menos $\frac{1}{2}$. (4.1)

Sejam $b_1, b_2, \ldots, b_k$ os vizinhos em H de um vértice $a \in A$, e seja C um subconjunto fixo de S com $|C| = k$. Para todo i, $1 \leq i \leq k$, $P[L(b_i) = C] = \binom{k^4}{k}^{-1}$. Portanto,

$$\begin{aligned} P[\bigwedge_{i=1}^{k} L(b_i) \neq C] &= (1 - \binom{k^4}{k}^{-1})^{d_H(a)} \\ &\leq (1 - \binom{k^4}{k}^{-1})^{\delta(H)}. \end{aligned}$$

Como existem $\binom{k^4}{k}$ subconjuntos de S com k elementos, a probabilidade de que existe $C \subset S$ com $|C| = k$ tal que $\bigwedge_{i=1}^{k} L(b_i) \neq C$ é no máximo $\binom{k^4}{k}(1 - \binom{k^4}{k}^{-1})^{\delta(H)}$. A desigualidade $\delta(H) \geq \frac{d(G)}{4}$ e a hipótese do teorema de que $d(G) > 4\binom{k^4}{k}\log(2\binom{k^4}{k})$ implicam em

$$\begin{aligned} \binom{k^4}{k}(1 - \binom{k^4}{k}^{-1})^{\delta(H)} &\leq \binom{k^4}{k}(1 - \binom{k^4}{k}^{-1})^{\frac{d(G)}{4}} \\ &\leq \binom{k^4}{k}(1 - \binom{k^4}{k}^{-1})^{\binom{k^4}{k}\log(2\binom{k^4}{k})} \\ &\leq \binom{k^4}{k}\mathrm{e}^{-\log(2\binom{k^4}{k})} \\ &\leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Logo, a probabilidade de que vértice a náo é bom é no máximo $\binom{k^4}{k}(1-\frac{1}{\binom{k^4}{k}})^{\delta(H)} \leq \frac{1}{2}$. Isto implica a afirmação 4.1.

Pela afirmação 4.1, se $X := |\{a \in A : a \text{ é bom}\}|$, a esperança de X é $E(X) \geq \frac{1}{2}|A|$. Logo, existe uma escolha de conjuntos $L(b)$, $b \in B$ para qual o número de vértices de A que são bons é pelo menos $\frac{1}{2}|A|$. Fixamos uma tal escolha de conjuntos $L(b)$, $b \in B$. Para todo $a \in A$, seja $L(a)$ um subconjunto aleatório de S escolhido de modo uniforme e independentemente entre todos os $\binom{k^4}{k}$ subconjuntos de S com k elementos. Em seguida mostramos que

A probabilidade de que H admite uma L-coloração é menor a um. (4.2)

Existem $k^{|B|}$ possíveis colorações de vértices de B a partir das listas $L(b)$ definidas. Fixamos uma tal coloração c e estimamos a probabilidade de que c pode ser estendida a coloração de H respeitando as listas $L(a)$, $a \in A$. Se $a \in A$ é um vértice bom, então o conjunto $K := \{c(b) : b \in B, b \text{ é vizinho de } a \text{ em } H\}$ intersecta todo subconjunto de S com k elementos, isto pois todo k-subconjunto C de S satisfaz que $C = L(b)$ para algum vizinho b de a em H. Portanto, $|K| \geq k^4 - k + 1$, isto é, c usa pelo menos $k^4 - k + 1$ cores para vizinhos de a em H. Logo, $|S \setminus K| \leq k - 1$ e portanto, podemos corolir vértice a a partir de $L(a)$ se é so se $L(a)$ contém uma das no máximo $k-1$ cores de conjunto $S \setminus K$, isto é, $L(a) \setminus K \neq \emptyset$.

Em seguida mostramos que

$$P[L(a) \setminus K \neq \emptyset] < \tfrac{1}{k^2}.$$

Fixamos um elemento d de $S \setminus K$. O número de k-subconjuntos de S que contém d é $\binom{k^4-1}{k-1}$. Como $|S \setminus K| \leq k-1$ temos que o número de k-subconjuntos de S que contém pelo menos um elemento de $S \setminus K$ é $(k-1)\binom{k^4-1}{k-1}$. $L(a)$ é um subconjunto aleatório de S com k elementos e portanto, a probabilidade de que $L(a) \setminus K \neq \emptyset$ é

$$\begin{aligned}\frac{(k-1)\binom{k^4-1}{k-1}}{\binom{k^4}{k}} &= \frac{(k-1)(k^4-1)!k!}{k^4!(k-1)!} \\ &= \frac{(k-1)k}{k^4} < \frac{k^2}{k^4} \\ &< \frac{1}{k^2}.\end{aligned}$$

Logo, para um fixo vértice $a \in A$, a probabilidade de $L(a) \setminus K \neq \emptyset$, isto é, a probabilidade de que podemos colorir a a partir de lista $L(a)$ é estritamente menor a $\frac{1}{k^2}$.

Os eventos $L(a) \setminus K \neq \emptyset$, para distintos vértices bons a de A são independentes, isto pela escolha de conjuntos $L(a)$ de modo independente. Portanto, se l vértices em A são bons, a probabilidade de que c pode ser estendida a uma coloração de H respeitando as listas $L(a)$, $a \in A$ é estritamente menor a $(\frac{1}{k^2})^l$. As inequações $l \geq \frac{|A|}{2}$ e $|A| \geq |B|$ implicam em

$$(\tfrac{1}{k^2})^l \leq (\tfrac{1}{k^2})^{\frac{|A|}{2}} \leq \tfrac{1}{k^{|B|}}.$$

Existem $k^{|B|}$ possíveis colorações c de vértices de B respeitando as listas $L(b)$. Mostramos que a probabilidade de que uma fixada tal coloração c pode ser estendida a uma coloração de

H respeitando as listas $L(a)$, $a \in A$ é estritamente menor a $\frac{1}{k^{|B|}}$. Portanto, a probabilidade de que H admite uma L-coloração é menor a $k^{|B|}\frac{1}{k^{|B|}} = 1$, o que prova 4.2.

Segue da afirmação 4.2 que a probabilidade de $\mathrm{ch}(H) \leq k$ é menor a um. Logo, $\mathrm{ch}(H) > k$ e a desigualdade $\mathrm{ch}(G) \geq \mathrm{ch}(H)$ implica a afirmação do teorema. □

O teorema abaixo nos fornece um fato interessante sobre o número cromático restrito de grafos aleatórios. Para as noções básicas de probabilidade e grafos aleatórios seguimos [2] e [8, cap. 11].

$\mathcal{G}(n,p)$ denota um espaço finito de probabilidade cujos elementos são grafos com conjunto de vértices $\{1,2,\ldots,n\}$, e onde todo par de vértices é ligado por uma aresta com a probabilidade p. Chamamos um grafo $G \in \mathcal{G}(n,p)$ de *grafo aleatório com aresta-probabilidade* p. Se A é uma propriedade de grafos, dizemos que *quase todo* G *de* $\mathcal{G}(n,p)$ *tem propriedade* A se a probabilidade de que G satisfaz A tende a 1 quando n tende a infinito, para $G \in \mathcal{G}(n,p)$.

Teorema 4.4 ([1])
Quase todo grafo G *em* $\mathcal{G}(n,\frac{1}{2})$ *satisfaz* $\mathrm{ch}(G) = (1+o(1))\frac{n}{2\log n}$.

Chamamos atenção para o fato de que a prova do teorema 4.4 é extensível a $\mathcal{G}(n,p)$ com qualquer p constante.

Em [5] Bollobás mostrou que quase todo grafo G em $\mathcal{G}(n,\frac{1}{2})$ satisfaz $\chi(G) = (1+o(1))\frac{n}{2\log n}$. Portanto, pelo teorema anterior temos que o número cromático e o número cromático restrito têm o mesmo comportamento assintótico em $\mathcal{G}(n,\frac{1}{2})$; isto é um tanto quanto surpreendente em vista do fato 4.2 e do teorema 4.3.

Demonstração do teorema 4.4

O resultado de Bollobás citado acima implica em

$$\textit{Quase todo grafo } G \textit{ em } \mathcal{G}(n,\tfrac{1}{2}) \textit{ satisfaz } \mathrm{ch}(G) \geq \chi(G) = (1+o(1))\frac{n}{2\log n}. \tag{4.3}$$

Em seguida mostramos

$$\textit{Quase todo grafo } G \textit{ em } \mathcal{G}(n,\tfrac{1}{2}) \textit{ satisfaz } \mathrm{ch}(G) \leq (1+o(1))\frac{n}{2\log n}. \tag{4.4}$$

Seja G um grafo de $\mathcal{G}(n,\frac{1}{2})$. Definimos o número $q := (1+o(1))2\log n$ e atribuimos a cada vértice v de G uma lista de cores tal que $|L(v)| \geq \frac{n}{q} + \frac{n}{\log^2 n} = (1+o(1))\frac{n}{2\log n}$. Damos um algoritmo que tem como entrada o grafo G e as listas $L(v)$, $v \in V$. Em cada iteração, o algoritmo colore um subconjunto independente Q com pelo menos q vértices de G com uma cor c de $\bigcap_{v\in Q} L(v)$. Cor c é omitida de listas de cores dos as demais vértices de G. O algoritmo retorna um subgrafo G' de G induzido por vértices que não receberam nenhuma cor.

A existencia do subconjunto independente Q no "loop" do algoritmo segue do seguinte resultado devido a Bollobás [5]:

Quase todo grafo $G \in \mathcal{G}(n, \frac{1}{2})$ satisfaz a propriedade de que todo conjunto de pelo menos $\frac{n}{\log^2 n}$ vértices de G contém um conjunto independente de q vértices.

Isto pois este resultado implica que a probabilidade de que todo conjunto de pelo menos $\frac{n}{\log^2 n}$ vértices de G contém um conjunto independente de q vértices tende a 1 quando n tende a infinito.

---

enquanto existe uma cor c que pertence a pelo menos $\frac{n}{\log^2 n}$ conjuntos $L(v)$, $v \in V_G$, **faça**
Escolhe um subconjunto independente Q com pelo menos q vértices tal que $Q \subseteq \{v \in V_G : c \in L(v)\}$.
Atribui cor c a todos os vértices de Q.
$G \longleftarrow G - Q$
para todo $v \in V_G$ **faça**
$L(v) \longleftarrow L(v) \setminus \{c\}$.

O algoritmo descrito tem no máximo $\frac{n}{q}$ iterações. Em cada iteração uma cor é omitida de listas de cores dos vértices de G'. Portanto, todo vértice do grafo G' obtido pelo algoritmo possui pelo menos $\frac{n}{\log^2 n}$ cores na sua lista. Ainda, cada cor pertence a menos do que $\frac{n}{\log^2 n}$ listas de cores $L(v)$, $v \in V_{G'}$.

Mostramos em segida que o teorema de Hall [8, p. 31] implica em

Existe uma atribuição de cores aos vértices de G' a partir das listas $L(v)$, $v \in V_{G'}$ de modo que cores atribuidas são dois a dois distintas. (4.5)

Definimos o grafo K com bipartição (A, B) com $A := V_{G'}$, $B := \bigcup_{v \in V_{G'}} L(v)$ e $vc \in E_k$ se e só se $c \in L(v)$. Seja A' um subconjunto de A. Definimos os conjuntos:

$$E_1 := \{\alpha \in E_K : \alpha \text{ incide em } A'\} \text{ e}$$
$$E_2 := \{\alpha \in E_K : \alpha \text{ incide em } \Gamma_K(A')\}.$$

Cada vértice de G' possui pelo menos $\frac{n}{\log^2 n}$ cores na sua lista, e portanto, $|E_1| \geq \frac{n}{\log^2 n}|A'|$. De outro lado, cada cor $c \in B$ pertence a menos do que $\frac{n}{\log^2 n}$ conjuntos $L(v)$, $v \in V_{G'}$ e portanto $|E_2| < \frac{n}{\log^2 n}|\Gamma_K(A')|$. Claramente, $E_1 \subseteq E_2$ e logo $|E_1| \leq |E_2|$. Temos então

$$\frac{n}{\log^2 n}|A'| \leq |E_1| \leq |E_2| < \frac{n}{\log^2 n}|\Gamma_K(A')|.$$

Ou seja, $|A'| < |\Gamma_K(A')|$. Pelo teorema de Hall, G' tem um emparelhamento que cobre A, o que implica a afirmação 4.5.

A probabilidade de que existe coloração do grafo G definida pelo algoritmo citado tende a 1 quando n tende a infinito. Ainda, a afirmação 4.5 implica que a atribuição de cores aos vértices de G definida pelo algoritmo pode ser estendida a coloração restrita de G respeitando as listas de cores $L(v)$ permitidas. Logo, a probabilidade de que G admite uma L-coloração, ou seja, $\mathrm{ch}(G) \leq (1 + o(1))\frac{n}{2 \log n}$ tende a 1 quando n tende a infinito, o que prova 4.4.

Afirmações 4.3 e 4.4 implicam a afirmação do teorema. □

5 Coloração restrita de grafos planares

Nesta seção tratamos de duas conjecturas propostas por Erdős, Rubin e Taylor [9] envolvendo número cromático restrito de grafos planares e outros resultados correlatos [13] e [21].

Para não nos prolongarmos demasiadamente utilizamos as definições em [8, cap. 4] referentes a grafos planares. Dizemos que G é um grafo *planar* se G pode ser desenhado no plano de modo que não existam duas arestas em G que se intersectem exceto num extremo em comum. O conjunto de todas as faces de um grafo plano G denotamos por $F(G)$.

Chamamos a atenção para o fato de que os grafos planares que consideramos não admitem arestas múltiplas por definição. Ainda, lembramos que todo grafo planar G satisfaz $\chi(G) \leq 4$.

O seguinte lema será necessário para várias teoremas no restante do texto.

Lema 5.1

Todo grafo planar G com pelo menos um circuito satisfaz $\|G\| \leq \frac{g(G)}{g(G)-2}(|G|-2)$.

Teorema 5.2 ([8])

Todo grafo planar G satisfaz $\mathrm{ch}(G) \leq 6$.

Demonstração.

Inicialmente, mostramos que

Todo grafo plano G contém um vértice de grau no máximo 5. (5.6)

Se G é um grafo plano, a cintura de G é no mínimo 3. Portanto, pelo lema 5.1

$$\begin{aligned}\|G\| &\leq \frac{g(G)}{g(G)-2}(|G|-2)\\ &\leq \frac{3}{3-2}(|G|-2)\\ &= 3|G|-6.\end{aligned}$$

Logo, o grau médio de G é

$$\begin{aligned}d(G) &= \frac{1}{|G|}\sum_{v\in V} d_G(v)\\ &= \frac{1}{|G|}2\|G\|\\ &\leq \frac{1}{|G|}2(3|G|-6)\\ &< 6.\end{aligned}$$

Segue que G tem um vértice de grau no máximo 5, ou seja, vale a afirmação 5.6.

Seja G um grafo plano. Claro, todo subgrafo de G é plano e portanto a afirmação 5.6 implica em $\mathrm{col}(G) \leq 6$. Segue do teorema 4.1 que $\mathrm{ch}(G) \leq 6$. □

O seguinte teorema é uma solução para uma das conjecturas propostas por Erdős, Rubin e Taylor [9].

Teorema 5.3 (Thomassen [20])

Todo grafo planar G satisfaz $\mathrm{ch}(G) \leq 5$.

O truque da prova é encontrar uma hipótese de indução apropriada. A afirmação do teorema segue do seguinte lema:

Lema 5.4

Seja G um grafo plano tal que toda face interna de G é limitada por um triângulo e a face externa por um circuito $C := v_1v_2 \ldots v_kv_1$. Suponha que v_1 e v_2 são coloridos com 1 e 2, respectivamente, e que $L(v)$ é uma lista de pelo menos três cores se $v \in V_C \setminus \{v_1, v_2\}$ e de pelo menos cinco cores se $v \in V_G \setminus V_C$. Então, a coloração de v_1 e v_2 pode ser estendida a uma coloração restrita de G respeitando as listas $L(v)$ dadas.

Demonstração.

A prova é por indução em $|G|$.

Se $|G| = 3$, então G é um triângulo $v_1v_2v_3v_1$ e vértice v_3 tem três cores na sua lista. Portanto, a afirmação do teorema é satisfeita trivialmente.

Seja $|G| \geq 4$.

Analisamos dois casos: quando C tem uma corda e não tem nenhuma corda.

- Se C tem uma corda v_iv_j com $2 \leq i \leq j-2 \leq k-1$ ($v_{k+1} := v_1$), então definimos os circuitos $C_1 := v_1v_2 \ldots v_iv_jv_{j+1} \ldots v_kv_1$ e $C_2 := v_jv_iv_{i+1} \ldots v_{j-1}v_j$ e denotamos com H_1 o subgrafo de G induzido por vértices de C_1 e vértices de face interna de C_1. E com H_2 o subgrafo de G induzido por vértices de C_2 e vértices de face interna de C_2 (figura 2). Por hipótese de indução, coloração de v_1 e v_2 pode ser estendida a coloração de H_1 respeitando as listas $L(v)$ dadas. Aplicando o hipótese de indução novamente a H_2, com cores atribuidas aos vértices v_i e v_j, obtemos coloração desejada de G.

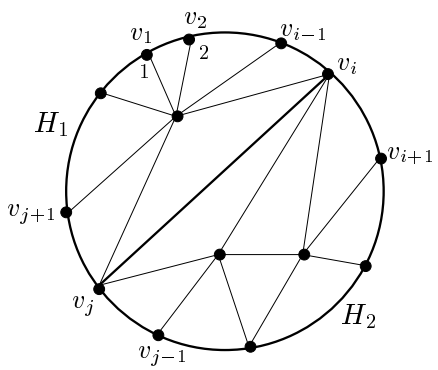

Figura 2: Passo da indução em caso quando C tem uma corda v_iv_j.

- Se C não tem nenhuma corda, sejam $v_1, u_1, u_2, \ldots, u_m, v_{k-1}$ os vizinhos de v_k no sentido horário em torno de v_k. Como C nao tem nenhuma corda, todos os vizinhos u_i, $1 \leq i \leq m$ de v_k estão em face interna de C. Ainda, toda face interna de G é limitada por um triângulo, então $P := v_1u_1u_2 \ldots u_mv_{k-1}$ é um caminho em G com os vértices u_i, $1 \leq i \leq m$, em face interna de C. Portanto, $C' := P \cup (C - v_k)$ é um circuito (figura 3).

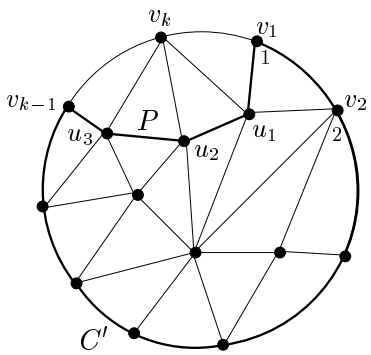

Figura 3: Passo da indução em caso quando C não tem nenhuma corda.

Sejam j e l duas cores distintas em $L(v_k) \setminus \{1\}$. Definimos as listas de cores

$$L'(u_i) := L(u_i) \setminus \{j, l\} \text{ para } 1 \leq i \leq m \text{ e}$$
$$L'(v) := L(v) \text{ se } v \in G \setminus \{u_i : 1 \leq i \leq m\}.$$

Para todo i, $1 \leq i \leq m$, a lista $L(u_i)$ contém pelo menos cinco cores e portanto, $|L'(u)| \geq 3$ se $u \in C'$. Logo, o hipótese de indução implica que a coloração de v_1 e v_2 pode ser estendida a coloração de $G - v_k$ respeitando as listas L'. Finalmente, completamos coloração de G atribuindo cor j ou l ao vértice v_k de modo que as cores atribuidas a v_{k-1} e v_k foram distintas. □

Demonstração do teorema 5.3

Se G é um grafo plano e L uma atribuição de cores aos vértices de G com $|L(v)| = 5$ para todo $v \in V$, seja G' grafo plano máximal obtido adicionando-se arestas a G. Pela proposição 4.2.6. em [8, p. 73], toda face de G' é limitada por um triângulo.

Seja $v_1v_2v_3v_1$ a fronteira de face externa de G'. Atribuimos a v_1 e v_2 cores de suas listas de modo que elas sejam distintas. Omitimos as cores atribuidas a v_1 e v_2 de lista de cores permitidas de v_3. Claro, a lista de cores permitidas de v_3 obtida tem três elementos. O lema 5.4 implica que a coloração de v_1 e v_2 pode ser estendida a coloração de G' respeitando as listas de cores dadas. Logo, $\text{ch}(G) \leq \text{ch}(G') \leq 5$. □

A prova do teorema 5.4 não utiliza troca de cores ao longo de um caminho nem a fórmula de Euler, que são os instrumentos utilizados na prova clássica do *teorema de cinco cores* [8, p. 96].

Um grafo G é planar se e só se não contém *minor* K_5 e nem *minor* $K_{3,3}$ [8, p. 84]. Para a definição de *minor* ver [8, p. 16]. Em [25], Škrekovski extendeu o resultado de Thomassen provando que todo grafo G sem minor K_5 satisfaz $\text{ch}(G) \leq 5$.

A conjectura de que existem grafos planares com número cromático restrito maior que 4 é devido aos autores de [9]. Margit Voigt foi a primeira a provar esta conjectura em [23] exibindo um tal grafo com 238 vértices. Gutner usa uma construção mais simples.

Teorema 5.5 (Gutner [13])

Existe um grafo planar G, de ordem 75, com $\mathrm{ch}(G) > 4$.

Demonstração.

Inicialmente, definimos o grafo G_i com listas de cores permitidas para todos os vértices exceto u_i e v_i (figura 4).

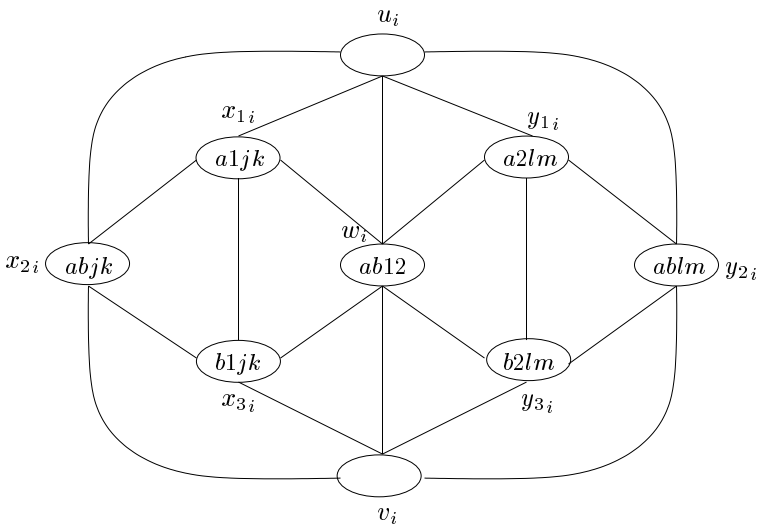

Figura 4: O grafo G_i com listas de cores permitidas para todos os vértices exceto u_i e v_i. Os conjuntos $\{j,k\}$ e $\{l,m\}$ não são necessariamente disjuntos.

Mostramos em seguida o seguinte fato:

Se c é uma atribuição de cores aos vértices u_i e v_i com $c(u_i) = a$, $c(v_i) = b$ e $a \neq b$, então a coloração c não pode ser estendida a coloração de G_i que respeita as listas de cores permitidas definidas em figura 4. (5.7)

O vértice w_i pode ser colorido 1 ou 2.

Se $c(w_i) = 1$, então, para estender a coloração c a uma coloração de G_i que respeita as listas de cores definidas como em figura 4, o triângulo $x_{1i}x_{2i}x_{3i}x_{1i}$ necessariamente deve ser colorido com as cores de conjunto $\{j,k\}$, o que é ímpossivel.

Se $c(w_i) = 2$ analogamente obtemos que c não pode ser estendida a coloração de G_i que respeita as listas definidas como em figura 4.

De fato, vale a afirmação 5.7.

Em seguida explicamos a construção do grafo G.

Tomamos a união disjunta de grafos G_i, $1 \leq i \leq 12$. Identificamos todos os vértices $u_1, u_2, \ldots, u_{12}$ num vértice só, denotado por u, assim como todos os vértices $v_1, v_2, \ldots, v_{12}$ num vértice denotado por v. Para todo $1 \leq i \leq 11$ identificamos os vértices $y_{2\,i}$ e $x_{2\,(i+1)}$. Adicionando aresta uv obtemos o grafo G.

Claro, o grafo G é planar e $|G| = 12 \cdot 7 + 2 - 11 = 75$.

Mostramos em seguida que $\mathrm{ch}(G) > 4$.

Definimos as listas $L(u) = L(v) := \{3, 4, 5, 6\}$ e o conjunto $A := \{(a, b) \in L(u) \times L(v) : a \neq b\}$. A cardinalidade do conjunto A é 12. Associamos a todo i, $1 \leq i \leq 12$ um elemento $p_i \in A$ de modo que $p_i \neq p_j$ se $i \neq j$.

Para todo i, $1 \leq i \leq 12$, denotamos $(a, b) := p_i$ e $(c, d) := p_{i+1}$ (com os índices tomados módulo 12) e definimos listas das cores para todos os vértices de G_i exceto u_i e v_i como em figura 4. Ainda, se $1 \leq i \leq 11$, as cores l e m em lista de y_{2i} escolhemos de modo que $\{l, m\} \supseteq \{c, d\} \setminus \{a, b\}$, ou seja, de modo que a lista de vértice y_{2i} contém as cores a, b, c e d e talvez outras cores se p_i e p_{i+1} não são disjuntos. Isto pois em construção de G identificamos os vértices y_{2i} e $x_{2(i+1)}$.

Seja c uma coloração de u e v tal que $c(u) \in L(u)$, $c(v) \in L(v)$ e $c(u) \neq c(v)$. Denotamos $a := c(u)$ e $b := c(v)$. Claro, $(a, b) \in A$ e portanto $(a, b) = p_i$ para algum i, $1 \leq i \leq 12$. Então, a afirmação 5.7 implica que c não pode ser estendida a coloração de G_i que respeita as listas de cores permitidas dos vértices de G_i. Logo, c não pode ser estendida a coloração de G que respeita as listas de cores dos vértices de G. □

O teorema de Grötzsch [12] afirma que: *todo grafo planar G sem triângulos satisfaz* $\chi(G) \leq 3$.

Teorema 5.6

Todo grafo planar G sem triângulos satisfaz $\mathrm{ch}(G) \leq 4$.

Demonstração.

Inicialmente, mostramos que

Todo grafo plano G sem triângulos contém um vértice de grau no máximo 3. (5.8)

Se G um grafo plano sem triângulos então $g(G) \geq 4$, e pelo lema 5.1 temos

$$\begin{aligned} \|G\| &\leq \frac{g(G)}{g(G)-2}(|G|-2) \\ &\leq \frac{4}{4-2}(|G|-2) \\ &= 2|G|-4. \end{aligned}$$

Logo, o grau médio de G é

$$\begin{aligned} d(G) &= \frac{1}{|G|}2\|G\| \\ &\leq \frac{1}{|G|}2(2|G|-4) \\ &< 4. \end{aligned}$$

Segue que G tem um vértice de grau no máximo 3, ou seja, vale a afirmação 5.8.

Seja G um grafo plano sem triângulos. Claro, todo subgrafo de G é plano e portanto a afirmação 5.8 implica em $\mathrm{col}(G) \leq 4$. Segue do teorema 4.1 que $\mathrm{ch}(G) \leq 4$. □

Novamente, Margit Voigt [24] foi a primeira a dar uma solução para o problema de Kratochvíl e Tuza mostrando que nem todo grafo planar G sem triângulos satisfaz $\mathrm{ch}(G) \leq 3$; ela exibiu um grafo planar sem triângulos com 166 vértices e número cromático restrito estritamente maior que 3. Gutner usa uma construção mais simples.

Teorema 5.7 (Gutner [13])
Existe um grafo planar G sem triângulos, de ordem 164, *com* $\mathrm{ch}(G) > 3$.

Demonstração.
Inicialmente, definimos o grafo G_i com listas de cores permitidas para todos os vértices exceto u_i e v_i (figura 5).

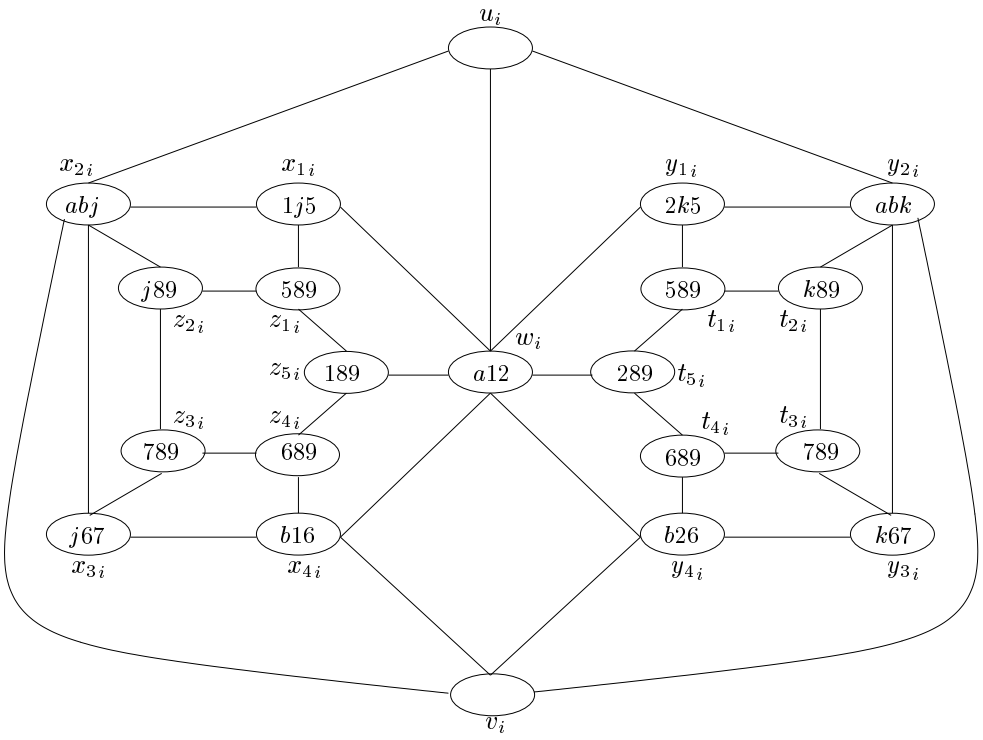

Figura 5: O grafo G_i com listas de cores permitidas para todos os vértices exceto u_i e v_i.

Mostramos em seguida o seguinte fato:

Se c é uma atribuição de cores aos vértices u_i e v_i com $c(u_i) = a$, $c(v_i) = b$ e $a \neq b$, então a coloração c não pode ser estendida a coloração de G_i que respeita as listas de cores permitidas definidas em figura 5. (5.9)

Como $c(u_i) = a$ e $c(v_i) = b$, os vértices x_{2i} e y_{2i} necessariamente devem ser coloridos com j e k respectivamente. O vértice w_i pode ser colorido 1 ou 2.

Se $c(w_i) = 1$, então os vértices x_{1i} e x_{4i} necessariamente devem ser coloridos com 5 e 6 respectivamente. Logo, a única cor disponível em lista de x_{3i} é 7. Portanto, para estender a

coloração c a uma coloração de G_i que respeita as listas de cores definidas em figura 5 precisamos colorir o circuito $z_{1i}z_{2i}z_{3i}z_{4i}z_{5i}z_{1i}$ com as cores do conjunto $\{8,9\}$ o que é ímpossivel.

Se $c(w_i) = 2$ analogamente obtemos que c não pode ser estendida a coloração de G_i que respeita as listas definidas como em figura 5.

De fato, vale a afirmação 5.9.

Em seguida explicamos a construção do grafo G.

Tomamos a união disjunta de grafos G_i, $1 \leq i \leq 9$. Identificamos todos os vértices $u_1, u_2, \ldots, u_9$ num vértice só, denotado por u, assim como todos os vértices $v_1, v_2, \ldots, v_9$ num vértice denotado por v. Para todo $1 \leq i \leq 9$ identificamos os vértices y_{2i} e $x_{2(i+1)}$ (com os índices tomados módulo 9). O grafo obtido denotamos por G.

O grafo G é planar sem triângulos e $|G| = 19 \cdot 9 + 2 - 9 = 164$.

Em seguida mostramos que $\mathrm{ch}(G) > 3$.

Definimos as listas $L(u) := \{10, 11, 12\}$, $L(v) := \{13, 14, 15\}$ e uma ordenação dos elementos de $L(u) \times L(v)$:

$$(p_i)_{i=1}^{9} := \big((10,13),(10,14),(10,15),(11,15),(11,13),(11,14),(12,14),(12,15),(12,13)\big).$$

Para todo i, $1 \leq i \leq 9$, denotamos $(a,b) := p_i$ e $(c,d) := p_{i+1}$ (com os índices tomados módulo 9) e definimos listas das cores para todos os vértices de G_i exceto u_i e v_i como em figura 5. Ainda, em construção de G identificamos os vértices y_{2i} e $x_{2(i+1)}$, e portanto cor k em lista de y_{2i} escolhemos de modo que $\{a,b,k\} = \{a,b,c,d\}$, isto é, de modo que a lista de vértice y_{2i} seja $\{a,b,c,d\}$. Note que o tamanho de conjunto $\{a,b,c,d\}$ é 3 pois para todo $1 \leq i \leq 9$, p_i e p_{i+1} (com os índices tomados módulo 9) tem exatamente um vértice em comum.

Seja c uma coloração de u e v tal que $c(u) \in L(u)$ e $c(v) \in L(v)$. Denotamos $a := c(u)$ e $b := c(v)$. Claro, $(a,b) = p_i$ para algum i, $1 \leq i \leq 9$. Então, a afirmação 5.9 implica que c não pode ser estendida a coloração de G_i que respeita as listas de cores permitidas dos vértices de G_i. Logo, c não pode ser estendida a coloração de G que respeita as listas de cores dos vértices de G. □

Na prova do teorema a seguir, Thomassen estende o método usado na prova de 5.3.

Teorema 5.8 ([21])
Todo grafo planar G com $g(G) \geq 5$ satisfaz $\mathrm{ch}(G) \leq 3$.

Um último fato sobre grafos planares, cujo esboço da prova apresentamos na seção seguinte, é que *todo grafo planar G bipartido satisfaz* $\mathrm{ch}(G) \leq 3$ que é conseqüência do teorema 6.1.

6 Coloração restrita e orientações de grafos

Usando técnicas algébricas, Alon e Tarsi [3] obtiveram uma relação interessante entre coloração e orientações de grafos, que em vários casos fornece informações úteis sobre o número cromático restrito. A seguir damos algumas definições, o esboço da prova do resultado de Alon e Tarsi e uma aplicação deste resultado.

Um *grafo orientado* D é um par de conjuntos finitos (V_D, E_D), com E_D um conjunto de pares ordenados de elementos distintos de V_D. Os elementos de E_D são chamados *arcos*. Se

$\alpha = (u, v)$ é um arco de um grafo orientado, dizemos que α tem *início* em u e *término* em v. Também dizemos que u e v são os extremos de α ou que u e v são *adjacentes*.

O *grau de saida* de um vértice v num grafo D é o número de arcos em D com início em v e o denotamos por $d_D^+(v)$. O *grau de entrada* de v é o número de arcos com término em v e será denotado por $d_D^-(v)$. O *grau* de um vértice v de um grafo D é o número $d_D(v) := d_D^+(v) + d_D^-(v)$.

Ordem, tamanho, subgrafo, coloração e coloração restrita de um grafo orientado D possuem definições análogas àquelas dadas para grafos não orientados.

O *grafo base* de um grafo orientado D é o grafo G obtido substituindo-se cada arco por uma aresta. Dizemos que D é uma *orientação* de G se e só se G é grafo base de D.

Um *caminho orientado* é um grafo orientado P com $V_P = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ não vazio e os v_i todos distintos e $E_P = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), \ldots, (v_{k-1}, v_k)\}$. Se $k \geq 2$, então o grafo $(V_P, E_P \cup \{(v_k, v_1)\})$ é chamado de *circuito orientado*. Um *ciclo orientado* é uma união de circuitos orientados disjuntos nas arestas. Um grafo orientado que não contém nenhum circuito orientado é chamado de *acíclico*.

Um grafo D é *euleriano* se e só se $d_D^+(v) = d_D^-(v)$ para todo vértice $v \in V$, ou seja, D contém um ciclo orientado P com $E_P = E_D$. Se D é um grafo orientado, um subconjunto $E \subseteq E_D$ é chamado *conjunto euleriano de arcos de* D se e só se (V_D, E) é um grafo euleriano. Definimos os números:

$\eta_0(D) := |\{E : E \text{ é um conjunto euleriano de arcos de } D \text{ e } |E| \text{ é par}\}|$ e

$\eta_1(D) := |\{E : E \text{ é um conjunto euleriano de arcos de } D \text{ e } |E| \text{ é ímpar}\}|$.

Note que para todo grafo D temos $\eta_0(D) \neq 0$, pois o subgrafo $(V_D, \emptyset)$ é euleriano.

Teorema 6.1 (Alon e Tarsi [3])

Seja D um grafo orientado e L uma atribuição de listas de cores aos vértices de D com $|L(v)| \geq d_D^+(v) + 1$ para todo $v \in V$. Se $\eta_0(D) \neq \eta_1(D)$, então D admite uma L-coloração.

A afirmação do teorema 6.1, para o caso especial de grafo orientado acíclico, implica 4.1 e pode ser provado usando-se indução na ordem do grafo.

Afirmação 6.2

Se D é um grafo acíclico e L uma atribuição de listas de cores aos vértices de D com $|L(v)| \geq d_D^+(v) + 1$ para todo $v \in V$, então D admite uma L-coloração.

Demonstração.

Para $|D| = 1$ a afirmação é satisfeita trivialmente.

Seja D um grafo com $|D| > 1$. D é acíclico e portanto existe um vértice $v \in V_D$ com $d_D^-(v) = 0$, isto é, $d_D^+(v) = d_D(v)$. Como $|L(v)| \geq d_D^+(v) + 1$, v tem mais cores na sua lista do que vizinhos. Portanto, D admite uma L-coloração se e só se $D - v$ admite uma L-coloração. Claro, $d_D^+(u) = d_{D-v}^+(u)$ para todo $u \in V_{D-v}$. Logo, $|L(u)| \geq d_{D-v}^+(u) + 1$ para todo vértice u de $D - v$. Ainda, $D - v$ é acíclico e portanto, pelo passo de indução, $D - v$ admite uma L-coloração. De fato acima, D admite uma L-coloração. □

Em seguir provamos que a afirmação 6.2 implica a teorema 4.1.

Demonstração.

Para um grafo G denotamos $n := |G|$ e $k := \mathrm{col}(G)$.

O algoritmo descrito abaixo defini uma ordenação $v_1, v_2, \ldots, v_n$ dos vértices de G e uma orientação de G.

$G_n \longleftarrow G$
para $i \longleftarrow n$ **até** 1 **faça**
Escolha como v_i um vértice de G_i com $d_{G_i}(v_i) = \delta(G_i)$.
Orienta todas as arestas de G_i que incidem em v_i de modo que ínicio seja em v_i.
$G_{i-1} \longleftarrow G_i - v_i$

Claro, a orientação D de G obtida pelo algoritmo é um grafo acíclico. Definimos $l := \max\limits_{1 \leq i \leq n} d_D^+(v_i)$. Pelo algoritmo, $d_D^+(v_i) = d_{G_i}(v_i) = \delta(G_i)$ para todo i, $1 \leq i \leq n$. Logo,

$$l = \max_{1 \leq i \leq n} \delta(G_i) \leq k - 1.$$

A última desigualdade segue da definição do número de coloração. Seja L uma atribuição de listas de cores aos vértices de D com $|L(v_i)| \geq l + 1$ para todo i, $1 \leq i \leq n$. Pela definição do número l, $|L(v_i)| \geq d_D^+(v_i) + 1$ para todo i, $1 \leq i \leq n$. D é acíclico e portanto, pela afirmação 6.2, D admite uma L-coloração. Logo, $\mathrm{ch}(D) \leq l + 1 \leq k = \mathrm{col}(G)$, ou seja, $\mathrm{ch}(G) \leq \mathrm{col}(G)$. □

Os lemas a seguir são necessárias para a prova de 6.1.

Para as definições básicas, relativas a grupo e anel, necessárias para tratar da abordagem algébrica no lema seguinte citamos [17].

Lema 6.3

Seja $p = p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ um polinômio sobre o anel de números inteiros $\mathbb{Z}$. Suponha que o grau de p, como polinômio em x_i, é no máximo d_i para todo i, $1 \leq i \leq n$ e seja S_i um subconjunto de $\mathbb{Z}$ com $d_i + 1$ números distintos para todo i. Se $p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ para toda n-upla $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ em $S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n$, então $p \equiv 0$.

Demonstração.

A prova do lema é por indução em n.

Para $n = 1$ afirmação segue do seguinte fato:

> *Um polinômio não nulo de grau d_1 em uma variável tem no máximo d_1 nulas distintas.*

Se $n > 1$, escrevemos um dado polinômio $p = p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ como polinômio em x_n, isto é,

$$p = \sum_{i=0}^{d_n} p_i(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) x_n^i.$$

Fixamos um elemento $(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_{n-1}})$ de $S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_{n-1}$. Por suposição,
$p(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_{n-1}}, x_n) = \sum_{i=0}^{d_n} p_i(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_{n-1}}) x_n^i = 0$ para todo $x_n \in S_n$.

Portanto, $\sum_{i=0}^{d_n} p_i(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_{n-1}}) x_n^i \equiv 0$, o que implica em $p_i(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_{n-1}}) = 0$ para todo i, $0 \leq i \leq d_n$. Então,

$p_i(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = 0$ para todo i, $0 \leq i \leq d_n$ e $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \in S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_{n-1}$.

Ainda, para todo i, $0 \leq i \leq d_n$, o grau de p_i como polinômio em x_j é no máximo d_j para todo j, $1 \leq j \leq n-1$. Logo, Por hipótese da indução, $p_i \equiv 0$ para todo i, $0 \leq i \leq d_n$, o que implica em $p \equiv 0$. □

Se G é um grafo não orientado com vértices $v_1, v_2, \ldots, v_n$, então o *polinômio de* G é

$$f_G(x_1, x_2, \ldots, x_n) := \prod_{i<j,\ v_i v_j \in E_G} (x_i - x_j).$$

Peso de uma aresta $\alpha = (v_i, v_j)$ de um grafo D, denotado por $w(\alpha)$ é

$$w(\alpha) := \begin{cases} x_i & \text{se } i < j, \\ -x_i & \text{se } i > j. \end{cases}$$

Peso de grafo D é $w(D) := \prod_{\alpha \in E_D} w(\alpha)$.

Chamamos um arco (v_i, v_j) de *decresente* se $i > j$. Uma orientação D de G é *par* (resp. *ímpar*) se D tem número par (resp. ímpar) de arcos decresentes. Dados números inteiros não negativos $d_1, d_2, \ldots, d_n$, com $DE(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ (resp.$DO(d_1, d_2, \ldots, d_n)$) denotamos o conjunto de todas as orientações pares (resp. ímpares) D de G com $d_D^+(v_i) = d_i$ para todo i, $1 \leq i \leq n$.

O lema seguinte afirma que em todo grafo G os coeficientes dos monômios que aparecem na representação de f_G como combinação linear de monômios podem ser expressos em termos das orientações de G.

Lema 6.4

Para todo grafo G,

$$f_G(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{d_1, d_2, \ldots, d_n \geq 0} (|DE(d_1, d_2, \ldots, d_n)| - |DO(d_1, d_2, \ldots, d_n)|) \prod_{i=1}^{n} x_i^{d_i}.$$

Demonstração.

Seja G um grafo. Inicialmente, mostramos que

$$f_G = \sum_{D \text{ é orientação de } G} w(D). \tag{6.10}$$

Para toda aresta $\alpha = v_i v_j$ com $i < j$, $w\big((v_i, v_j)\big) = x_i$ e $w\big((v_j, v_i)\big) = -x_j$. Portanto, cada termo de cada monômio em representação de f_G como combinação linear de monômios, corresponde á uma escolha de orientação de uma aresta de G. Logo, cada monômio em representação de f_G como combinação linear de monômios corresponde á peso de uma orientação de G (figura 6).

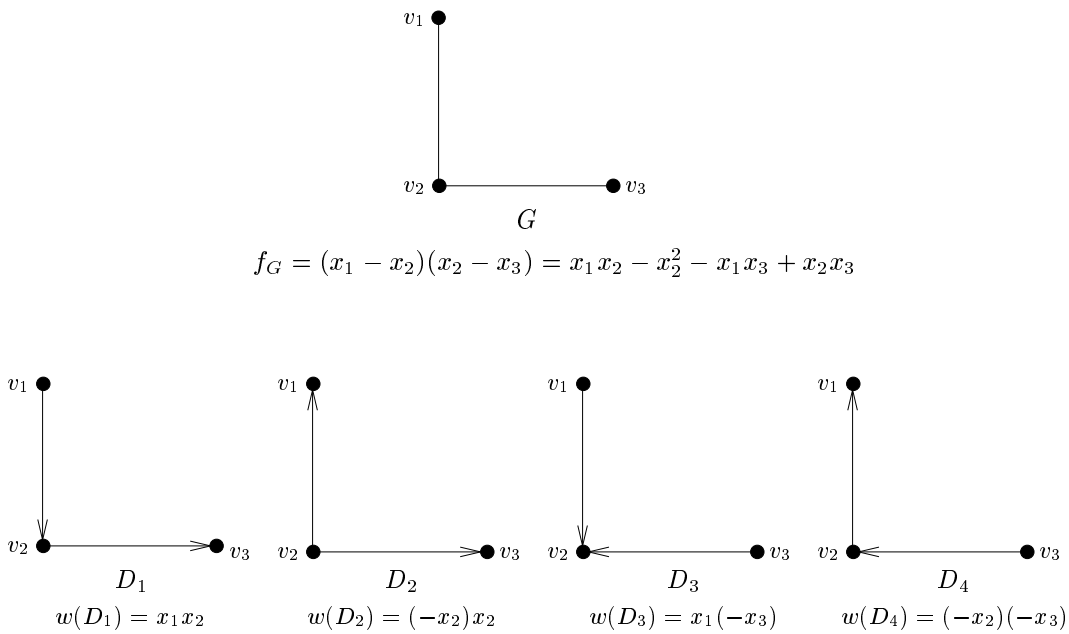

Figura 6: Cada monômio em representação de f_G como combinação linear de monômios corresponde á peso de uma orientação de G.

Seja D uma orientação de G e $d_i := d_D^+(v_i)$ para todo i, $1 \leq i \leq n$. Pela definição de peso de aresta temos

$$w(D) = \prod_{\alpha \in D} w(\alpha) = \begin{cases} \prod_{i=1}^n x_i^{d_i} & \text{se } D \in DE(d_1, d_2, \ldots, d_n), \\ -\prod_{i=1}^n x_i^{d_i} & \text{se } D \in DO(d_1, d_2, \ldots, d_n). \end{cases}$$

Portanto,

$$\sum_{D \text{ é orientação de } G,\ d_D^+(v_i)=d_i} w(D) = (|DE(d_1, d_2, \ldots, d_n)| - |DO(d_1, d_2, \ldots, d_n)|) \prod_{i=1}^n x_i^{d_i} \quad (6.11)$$

As equações 6.10 e 6.11 implicam em

$$\begin{aligned} f_G &= \sum_{D \text{ é orientação de } G} w(D) \\ &= \sum_{d_1, d_2, \ldots, d_n \geq 0} \Big(\sum_{D \text{ é orientação de } G,\ d_D^+(v_i)=d_i} w(D) \Big) \\ &= \sum_{d_1, d_2, \ldots, d_n \geq 0} (|DE(d_1, d_2, \ldots, d_n)| - |DO(d_1, d_2, \ldots, d_n)|) \prod_{i=1}^n x_i^{d_i}. \end{aligned}$$

□

A figura 7 mostra um exemplo para a afirmação do lema anterior.
Como corolário de lema 6.4 temos:

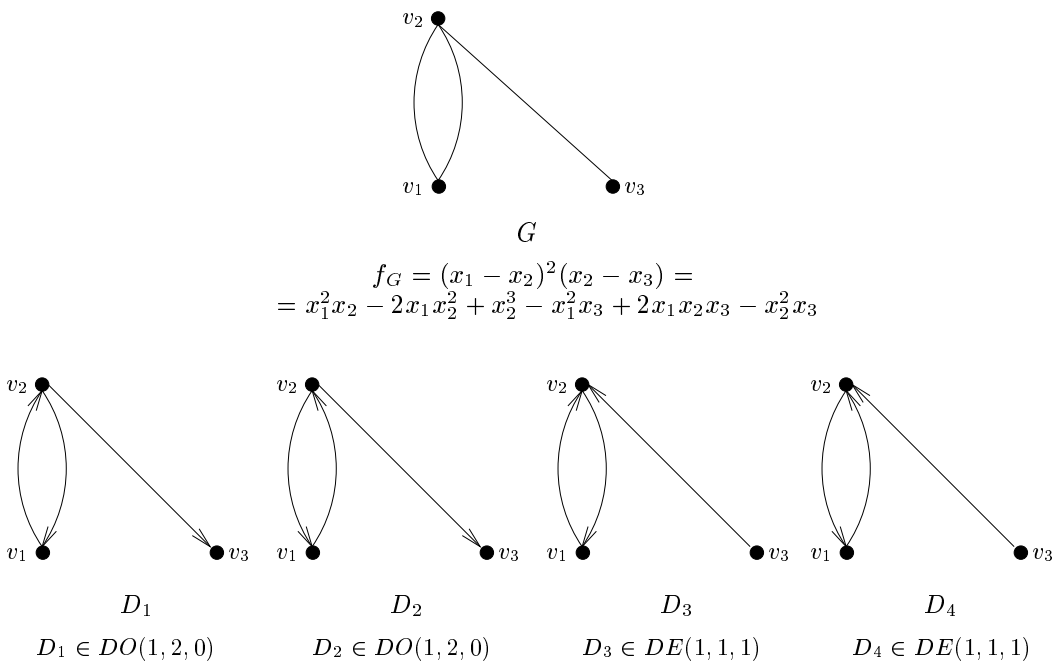

Figura 7: O coeficiente do monômio $x_1x_2^2$ na representação de f_G como combinação linear de monômios é $|DE(1,2,0)| - |DO(1,2,0)| = 0-2$; o coeficiente do monômio $x_1x_2x_3$ é $|DE(1,1,1)| - |DO(1,1,1)| = 2 - 0$.

Lema 6.5

Se D é uma orientação de um grafo G com $V_G = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ e para todo i, $1 \leq i \leq n$, $d_i := d_D^+(v_i)$, então o valor absoluto do coeficiente do monômio $\prod_{i=1}^n x_i^{d_i}$ na representação de f_G como combinação linear de monômios é $|\eta_0(D) - \eta_1(D)|$.

Demonstração.

Seja D_1 uma orientação qualquer de G com $d_{D_1}^+(v_i) = d_i$ para todo i, $1 \leq i \leq n$. Inicialmente mostramos que

O conjunto $D \oplus D_1$ de arcos de D que têm orientação diferente em D e D_1, é um conjunto euleriano de arcos de D. (6.12)

Se $\alpha = (v_i, v_j)$ é um arco, então definomos $\alpha^R := (v_j, v_i)$. Ainda, definimos os grafos

$$D_2 := (V_D, D \oplus D_1) \text{ e}$$
$$D_2^R := (V_D, \{\alpha^R : \alpha \in E_{D_2}\}).$$

O conjunto $E_{D_2^R}$ é então o conjunto de arcos de D_1 que têm orientação diferente em D e D_1.

Como $d_D^+(v) = d_{D_1}^+(v)$ para todo $v \in V_D$ e as arestas de D e D_1 com mesma orintação em D e D_1 atribuem a $d_D^+(v)$ e $d_{D_1}^+(v)$ com os mesmos valores, temos que

$$d_{D_2}^+(v) = d_{D_2^R}^+(v) \text{ para todo } v \in V_D.$$

Claro, $d^+_{D_2^R}(v) = d^-_{D_2}(v)$ para todo $v \in V_D$, e portanto, a equação anterior implica em

$$d^+_{D_2}(v) = d^-_{D_2}(v) \text{ para todo } v \in V_D.$$

Logo, D_2 é um grafo euleriano, ou seja, $D \oplus D_1$ é um conjunto euleriano de arcos.

A afirmação 6.12 implica que $\varphi : D_1 \to D \oplus D_1$ é uma bijeção entre $DE(d_1, d_2, \ldots, d_n) \cup DO(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ e os conjuntos eulerianos de arcos de D. Claramente, uma aresta (v_i, v_j) não é decresente em D_2 se e só se (v_i, v_j) é decresente em D_2^R. Temos então,

$$\begin{aligned} |D \oplus D_1| &= |\{\alpha \in E_{D_2} : \alpha \text{ é decresente}\}| + |\{\alpha \in E_{D_2} : \alpha \text{ não é decresente}\}| \\ &= |\{\alpha \in E_{D_2} : \alpha \text{ é decresente}\}| + |\{\alpha \in E_{D_2^R} : \alpha \text{ é decresente}\}|. \end{aligned}$$

Portanto, $|D \oplus D_1|$ é par se e só se D e D_1 são de mesma paridade. Logo, temos:

- Se D é par, então φ é uma bijeção que mapea orientações pares (resp. ímpares) de G a conjuntos eulerianos de arcos de D com número par (resp. ímpar) de arcos. Portanto, $|DE(d_1, d_2, \ldots, d_n)| = \eta_0(D)$ e $|DO(d_1, d_2, \ldots, d_n)| = \eta_1(D)$.
- Se D é ímpar, então φ é uma bijeção que mapea orientações pares (resp. ímpares) de G a conjuntos eulerianos de arcos de D com número ímpar (resp. par) de arcos. Portanto, $|DE(d_1, d_2, \ldots, d_n)| = \eta_1(D)$ e $|DO(d_1, d_2, \ldots, d_n)| = \eta_0(D)$.

Em ambos casos temos

$\big||DE(d_1, d_2, \ldots, d_n)| - |DO(d_1, d_2, \ldots, d_n)|\big| = |\eta_0(D) - \eta_1(D)|$ e a afirmação segue de 6.4. □

Demonstração do teorema 6.1

Para a prova do teorema 6.1 consideramos D um grafo com $V_D = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ e L uma atribuição de listas de cores. Denotamos por $d_i := d^+_D(v_i)$ para todo i, $1 \leq i \leq n$. Seja G o grafo base de D. Suponhamos que G não admite uma L-coloração, ou seja, para cada atribuição c de cores aos vértices de G com $x_i := c(v_i) \in L(v_i)$ para todo i, $1 \leq i \leq n$, existe uma aresta v_iv_j de G com $c(v_i) = c(v_j)$, isto é, $x_i = x_j$. Portanto,

$$f_G(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \text{ para todo } (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in L(v_1) \times \ldots \times L(v_n). \tag{6.13}$$

Definimos o polinômio $Q_i(x_i)$ para todo i, $1 \leq i \leq n$, como:

$$Q_i(x_i) := \prod_{l \in L(v_i)} (x_i - l).$$

Como $|L(v_i)| = d_i + 1$, podemos escrever

$$Q_i(x_i) = x_i^{d_i+1} - \sum_{j=0}^{d_i} q_{ij} x_i^j.$$

Se $x_i \in L(v_i)$, então $Q_i(x_i) = 0$, isto é,

$$x_i^{d_i+1} = \sum_{j=0}^{d_i} q_{ij} x_i^j. \tag{6.14}$$

Seja $\overline{f_G}$ o polinômio obtido pela representação de f_G como combinação linear de monômios, substituindo-se repetitivamente cada ocorrência de $x_i^{f_i}$, para todo i onde $f_i > d_i$, por uma combinação linear de x_i's com potência menor que f_i, para tanto usamos as equações 6.14.

Em seguida, mostramos que $\overline{f_G} \equiv 0$.

As equações em 6.14 são verdadeira para todo $x_i \in L(v_i)$, $1 \leq i \leq n$, e portanto $\overline{f_G}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ para todo $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in L(v_1) \times \ldots \times L(v_n)$. Logo, a afirmação 6.13 implica em

$$\overline{f_G}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \text{ para todo } (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in L(v_1) \times \ldots \times L(v_n).$$

Ainda, o grau de $\overline{f_G}$ como polinômio em x_i é no máximo d_i para todo i, $1 \leq i \leq n$. Segue do lema 6.3 que $\overline{f_G} \equiv 0$.

Como $\eta_0(D) \neq \eta_1(D)$, o lema 6.5 implica que o coeficiente do monômio $\prod_{i=1}^n x_i^{d_i}$ em f_G é não nulo.

Mostramos em seguida que

O coeficiente de $\prod_{i=1}^n x_i^{d_i}$ em $\overline{f_G}$ é igual ao coeficiente de $\prod_{i=1}^n x_i^{d_i}$ em f_G.

Em monômio $\prod_{i=1}^n x_i^{d_i}$ de f_G o grau de todo x_i é d_i, logo as equações em 6.14 não a afetam nas repetidas substituições para obter $\overline{f_G}$. Ainda, o polinômio f_G é homogêneo:

$f_G(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{l_1, l_2, \ldots, l_n \geq 0} (|DE(l_1, l_2, \ldots, l_n)| - |DO(l_1, l_2, \ldots, l_n)|) \prod_{i=1}^n x_i^{l_i}$. Como $l_i = d_D^+(v_i)$ para $D \in DE(l_1, l_2, \ldots, l_n) \cup DO(l_1, l_2, \ldots, l_n)$, então $\sum_{i=1}^n l_i = \sum_{v_i \in V_D} d_D^+(v_i) = \|D\|$ e portanto a soma $\sum_{i=1}^n l_i$ é fixa.

Como f_G é um polinômio homogêneo e cada aplicação de 6.14 diminui estritamente o grau de x_i, nas repetidas substituições para obter $\overline{f_G}$ de f_G, não teremos nenhum novo escalar múltiplo de $\prod_{i=1}^n x_i^{d_i}$.

Portanto, o coeficiente de $\prod_{i=1}^n x_i^{d_i}$ em $\overline{f_G}$ é igual ao coeficiente de $\prod_{i=1}^n x_i^{d_i}$ em f_G, que é não nulo. Isto é uma contradição com $\overline{f_G} \equiv 0$.

Logo, o hipótese de que G nao admite uma L-coloração leva a contradição. □

Uma aplicação do teorema 6.1 está na resolução de um dos problemas sugeridos pelos autores de [9].

Teorema 6.6 ([3])

Todo grafo planar G bipartido satisfaz $\mathrm{ch}(G) \leq 3$.

Primeiramente, provamos o lema:

Lema 6.7

Todo grafo bipartido G satisfaz $\mathrm{ch}(G) \leq \lceil s(G) \rceil + 1$, *com* $s(G) := \max_{H \subseteq G} \frac{\|H\|}{|H|}$.

Demonstração.

Denotamos $k := \lceil s(G) \rceil$ e definimos o grafo K com bipartição (A, B) tal que $A := E_G$, B é união de k cópias $V_1, V_2, \ldots, V_k$ de V_G e $\{\alpha, u\} \in E_K$ se e só se u é extremo de α em G, isto é, cada vértice $\alpha = uv$ de A é ligado por arestas de K a k cópias de u e a k cópias de v em B. Usando o teorema de Hall, vide [8], mostramos que

K tem um emparelhamento de tamanho $\|G\|$.

Seja $A' \subseteq A$. Claro, A' é o conjunto de arestas de um subgrafo H de G. Portanto, se $\alpha \in A'$ então $\{\alpha, u\} \in E_K$ se e só se u é extremo de α em G, isto é, $u \in V_H$. Logo, $|\Gamma_K(A')| = k|H|$. Pela definição de $s(G)$ e k temos

$$\frac{|A'|}{|H|} = \frac{\|H\|}{|H|} \leq s(G) \leq k.$$

Portanto, $|A'| \leq k|H| = |\Gamma_K(A')|$. O teorema de Hall implica que K tem um emparelhamento M de tamanho $|A| = \|G\|$.

Para todo $\{\alpha, u\} \in M$ orientamos a aresta α de G de modo que início seja em u e denotamos a orientação obtida por D. Pela definição de partição B, todo vértice de G é extremo de no máximo k arestas em M e portanto, $d_D^+(v) \leq k$ para todo $v \in V_D$. G não contém circuitos ímpares pois é bipartido, logo $\eta_1(D) = 0$. Portanto, $\eta_0(D) \neq \eta_1(D)$ e o teorema 6.1 imlica em $\mathrm{ch}(G) \leq k + 1 = \lceil s(G) \rceil + 1$. □

Demonstração do teorema 6.6

Mostramos que

Todo grafo planar G bipartido satisfaz $s(G) \leq 2$.

Seja $H \subseteq G$. H não contém circuitos ímpares pois é bipartido e portanto $g(H) \geq 4$. O lema 5.1 implica em $\|H\| \leq 2|H| - 4$. Logo,

$$\frac{\|H\|}{|H|} \leq \frac{2|H|-4}{|H|} \leq 2.$$

Portanto, $s(G) \leq 2$ e a afirmação do teorema segue do lema 6.7 □

O resultado obtido em teorema 6.6 é exato pois $\mathrm{ch}(K_{2,4}) > 2$ (figura 8).

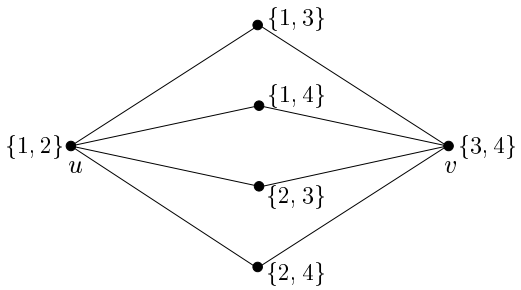

Figura 8: $\mathrm{ch}(K_{2,4}) > 2$ pois nenhuma coloração de u e v com cores de suas listas não pode ser estendida a coloração restrita de G respeitando as listas de cores permitidas.

7 A conjectura da coloração restrita de arestas

Tratamos nesta seção da conjectura da coloração restrita de arestas sugerida por Vizing e aparentemente publicada primeiro em artigo de Bollobás e Harris [6].

A seguir definimos os conceitos envolvendo coloração restrita de arestas.

Dado um grafo G e uma atribuição $\Lambda : E \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ de listas de cores às arestas de G, uma *coloração restrita de arestas que respeita* Λ ou Λ-*aresta-coloração* de G é uma Λ-coloração de seu grafo linha $L(G)$.

O *número aresta-cromático restrito* (*list chromatic index*), $\mathrm{ch}'(G)$, é o número cromático restrito do grafo linha de G. E o *número aresta-cromático* de G, $\chi'(G)$, é o número cromático de $L(G)$.

Segue da definição que para todo grafo G, $\mathrm{ch}'(G) \geq \chi'(G)$.

Conjectura 7.1 (Conjectura da coloração restrita de arestas)
Todo grafo G satisfaz $\mathrm{ch}'(G) = \chi'(G)$.

Na verdade, a conjectura foi proposta para multigrafos. Um *multigrafo* é uma generalização do conceito de grafo que permite várias arestas ligando um mesmo par de vértices.

Embora esta conjectura permaneça em aberto, houve um progresso considerável em seu estudo. Na subseção que se segue, apresentamos duas classes de grafos que satisfazem a conjectura. Na subseção 7.2 estudamos uma aproximação da igualdade sugerida pela conjectura.

7.1 A conjectura da coloração restrita de arestas para duas classes de grafos

A igualdade na conjectura 7.1 foi verificada somente para alguns poucos casos. Por exemplo, ela é trivialmente válida para árvores e grafos com o grau máximo menor que 3. Seguem duas classes de grafos menos triviais.

Usando o teorema 6.1, Häggkvist e Janssen obtiveram o seguinte resultado, que prova a conjectura 7.1 para grafos completos de ordem ímpar pois $\chi'(K_n) = n$ para n ímpar.

Teorema 7.2 ([14])
Para todo n, $\mathrm{ch}'(K_n) \leq n$.

Para a prova deste teorema aplica-se o teorema de Alon e Tarsi ao grafo linha de K_n. Todo grafo linha $L(G)$ pode ser escrito como união de cliques aresta-disjuntos, onde cada clique corresponde a um vértice de G e tal que todo vértice de $L(G)$ pertence a exatamente dois cliques que compõe $L(G)$. Um *torneio* é uma orientação de um grafo completo. Um torneio D é *transitivo* se $\{(u,v),(v,w)\} \subseteq E_D$ implica em $(u,w) \in E_D$. Uma orientação D de $L(G)$ é *clique-transitiva* se ela induz em cada clique um torneio transitivo. Se temos uma decomposição de um grafo $L(G)$ em cliques, então para aplicar o teorema de Alon e Tarsi é suficiente considerar somente as orientaçoes clique-transitivas de $L(G)$. Häggkvist e Janssen aplicaram a técnica de "blocking out" para eliminar certos valores dos possíveis graus de saída de vértices de um clique para reduzir, mais ainda, o número de orientações que consideramos. Descrevemos, a seguir, um algoritmo que atribui a cada vértice de $L(K_n)$ os graus de saida de modo que a atribuição definida pelo algoritmo determina a única orientação clique-transitiva de $L(K_n)$, conforme os valores eliminados pela técnica de "blocking out". Isto implica em $\mathrm{ch}'(K_n) \leq n$.

A conjectura 7.1 para grafos bipartidos completos equivale ao *problema dos quadrados latinos*, conhecido como *conjectura de Dinitz*, citada na introdução deste texto. A conjectura de Dinitz é conseqüência do seguinte resultado devido a Galvin.

Teorema 7.3 ([10])
Todo multigrafo bipartido G satisfaz $\mathrm{ch}'(G) = \chi'(G)$.

Para a demonstrar este teorema seguiremos a prova apresentada por Slivnik em [19], baseada na prova de Galvin, porém elementar e auto-contida.

A parte central da prova é o lema 7.4.

Se G é um multigrafo bipartido com bipartição (X, Y) e $\alpha \in E_G$, denotamos por α_X e α_Y os extremos de α em X e Y respectivamente.

Lema 7.4 ([19])
Se G é um multigrafo bipartido, ϕ uma aresta-coloração de G e para todo $\alpha \in E_G$, $T_G(\alpha) := |\{\beta \in E_G : \alpha_X = \beta_X, \phi(\beta) > \phi(\alpha)\}| + |\{\beta \in E_G : \alpha_Y = \beta_Y, \phi(\beta) < \phi(\alpha)\}|$, então $\mathrm{ch}'(G) \leq T_G + 1$, *onde* $T_G := \max_{\alpha \in E_G} T_G(\alpha)$.

Em seguida damos alguns definições necessárias para a prova deste lema.

Se G é um múltigrafo bipartido e $I \subseteq E_G$, uma aresta $\alpha \in I$ é *X-máximal* se toda aresta $\beta \in I, \beta \neq \alpha$ com $\beta_X = \alpha_X$ satisfaz $\phi(\alpha) > \phi(\beta)$, isto é, se $\phi(\alpha) = \max\{\phi(\beta) : \beta \in I \text{ e } \beta_X = \alpha_X\}$. Analogamente, uma aresta $\alpha \in I$ é *Y-máximal* se $\phi(\alpha) = \max\{\phi(\beta) : \beta \in I \text{ e } \beta_Y = \alpha_Y\}$. Uma aresta $\alpha \in I$ é *máximal* se α é X-máximal e Y-máximal.

Demonstração do lema 7.4
A prova é por indução em $\|G\|$.

Se $E_G = \emptyset$, a afirmação é satisfeita trivialmente.

Suponhamos que $E_G \neq \emptyset$. Seja Λ uma atribuição de listas de cores às arestas de G com $|\Lambda(\alpha)| > T_G(\alpha)$ para todo $\alpha \in E$. Seja c é uma cor do conjunto $\bigcup_{\alpha \in E} \Lambda(\alpha)$ e $I := \{\alpha \in E_G : c \in \Lambda(\alpha)\}$. Em seguida, usando indução em $|I|$ mostramos que existe um conjunto $M \subseteq I$ tal que

$$\begin{array}{l} M \text{ é um emparelhamento e para toda aresta } \alpha \in I \setminus M, \text{ existe uma aresta} \\ \beta \in M \text{ que satisfaz } \alpha_X = \beta_X \text{ e } \phi(\beta) > \phi(\alpha) \text{ ou } \alpha_Y = \beta_Y \text{ e } \phi(\beta) < \phi(\alpha). \end{array} \tag{7.15}$$

Se $I = \emptyset$, a afirmacao 7.15 vale trivialmente.

Suponhamos portanto que $I \neq \emptyset$. Analisamos dois casos:

1. Toda aresta de I X-máximal é Y-máximal.

   Definimos o conjunto $M := \{\alpha \in I : \alpha \text{ é máximal}\}$ e mostramos que M satisfaz 7.15.

   Duas arestas máximais não podem ter extremo em comum e portanto M é um emparelhamento. Como toda aresta de I X-máximal é Y-máximal, temos que toda aresta de I X-máximal é máximal e portanto pertence a M.

   Seja α uma aresta de $I \setminus M$. $\alpha \notin M$, logo α não é X-máximal. Seja β a aresta de I X-máximal com $\beta_X = \alpha_X$. Claro, $\phi(\beta) > \phi(\alpha)$. Ainda, β é X-máximal e portanto $\beta \in M$. De fato, $\beta \in M$, $\beta_X = \alpha_X$ e $\phi(\beta) > \phi(\alpha)$, ou seja, M satisfaz 7.15.

2. Existe uma aresta $\gamma \in I$ qual é X-máximal e não Y-máximal.

   Como γ não é Y-máximal, segue que

$$\textit{Existe uma aresta } \delta \textit{ em } I \textit{ com } \delta_Y = \gamma_Y \textit{ e } \phi(\delta) > \phi(\gamma). \tag{7.16}$$

   Definimos $I' := I \setminus \{\delta\}$. Por hipótese de indução, existe um emparelhamento $M \subset I'$ tal que

$$\begin{aligned}&\textit{Para toda aresta } \alpha \in I' \setminus M, \textit{ existe uma aresta } \beta \in M \textit{ que satisfaz}\\ &\alpha_X = \beta_X \textit{ e } \phi(\beta) > \phi(\alpha) \textit{ ou } \alpha_Y = \beta_Y \textit{ e } \phi(\beta) < \phi(\alpha).\end{aligned} \tag{7.17}$$

   Para mostrar que M satisfaz 7.15, basta claro provar que existe uma aresta $\beta \in M$ que satisfaz $\beta_X = \delta_X$ e $\phi(\beta) > \phi(\delta)$ ou $\beta_Y = \delta_Y$ e $\phi(\beta) < \phi(\delta)$.

   - Se $\gamma \in M$, então $\beta := \gamma$ é aresta desejada pois pela afirmação 7.16 γ satisfaz $\gamma_Y = \delta_Y$ e $\phi(\gamma) < \phi(\delta)$.
   - Se $\gamma \notin M$, então $\gamma \in I' \setminus M$. A afirmação 7.17 implica que existe uma aresta $\beta \in M$ que satisfaz $\gamma_X = \beta_X$ e $\phi(\beta) > \phi(\gamma)$ ou $\gamma_Y = \beta_Y$ e $\phi(\beta) < \phi(\gamma)$. Como γ é X-máximal, $\gamma_X = \beta_X$ e $\phi(\beta) > \phi(\gamma)$ não está satisfeito e portanto temos que

$$\gamma_Y = \beta_Y \text{ e } \phi(\beta) < \phi(\gamma).$$

     Ainda, pela afirmação 7.16

$$\delta_Y = \gamma_Y \text{ e } \phi(\gamma) < \phi(\delta).$$

     As duas últimas desigualdades implicam que existe uma aresta $\beta \in M$ tal que $\beta_Y = \delta_Y$ e $\phi(\beta) < \phi(\delta)$.

De fato, M satisfaz 7.15.

Mostramos em seguida que a existencia de conjunto $M \subseteq I$ que satisfaz 7.15 implica a afirmação do lema.

Definimos o grafo $G' := G \setminus M$ e para todo $\alpha \in E_{G'}$ a lista $\Lambda'(\alpha) := \Lambda(\alpha) \setminus \{c\}$. Mostramos em seguida que $|\Lambda'(\alpha)| > T_{G'}(\alpha)$ para todo $\alpha \in E_{G'}$.

- Se $\alpha \in E_{G'} \setminus I$, então, $c \notin \Lambda(\alpha)$ e portanto $|\Lambda'(\alpha)| = |\Lambda(\alpha)|$.

  Sabemos que $|\Lambda(\alpha)| > T_G(\alpha)$. Ainda, $G' \subseteq G$ e portanto $T_G(\alpha) \geq T_{G'}(\alpha)$. Logo,

$$|\Lambda'(\alpha)| = |\Lambda(\alpha)| > T_G(\alpha) \geq T_{G'}(\alpha).$$

- Se $\alpha \in I \setminus M$, então, $c \in \Lambda(\alpha)$ e portanto $|\Lambda'(\alpha)| = |\Lambda(\alpha)| - 1$.

  Como M satisfaz 7.15, existe $\beta \in M$ com $\alpha_X = \beta_X$ e $\phi(\beta) > \phi(\alpha)$ ou $\alpha_Y = \beta_Y$ e $\phi(\beta) < \phi(\alpha)$, ou seja, existe $\beta \in M$ tal que $\beta \in T_G(\alpha)$. Segue $T_G(\alpha) - 1 \geq T_{G'}(\alpha)$. Portanto,

$$|\Lambda'(\alpha)| = |\Lambda(\alpha)| - 1 > T_G(\alpha) - 1 \geq T_{G'}(\alpha).$$

Então, $|\Lambda'(\alpha)| \geq T_{G'}(\alpha) + 1$ para todo $\alpha \in E_{G'}$. Por hipótese de indução temos que $\mathrm{ch}'(G') \leq T_{G'} + 1$, ou seja, existe uma coloração c' de G' que respeita as listas Λ'. Definimos uma função $c : E_G \to \mathbb{N}$ como

$$c(\alpha) = \begin{cases} c'(\alpha) & \text{se } \alpha \in E_{G'}, \\ c & \text{se } \alpha \in M. \end{cases}$$

Claro, $c'(\alpha) \in \Lambda'(\alpha) = \Lambda(\alpha) \setminus \{c\}$, ou seja, $c'(\alpha) \neq c$ para todo $\alpha \in E_{G'}$. Ainda, M é um emparelhamento. Logo, c é uma coloração de G que respeita as listas Λ, isto é, $\mathrm{ch}'(G) \leq T_G + 1$. □

Demonstração do teorema 7.3

Seja G um múltigrafo bipartido, $\phi : E_G \to \{1, 2, \ldots, \chi'(G)\}$ uma aresta coloração de G e T_G definido como em lema 7.4. Então,

$$\begin{aligned} T_G(\alpha) &:= |\{\beta \in E_G : \alpha_X = \beta_X, \phi(\beta) > \phi(\alpha)\}| + |\{\beta \in E_G : \alpha_Y = \beta_Y, \phi(\beta) < \phi(\alpha)\}| \\ &\leq \big(\chi'(G) - \phi(\alpha)\big) + \big(\phi(\alpha) - 1\big) \\ &\leq \chi'(G) - 1. \end{aligned}$$

Lema 7.4 e a desigualidade acima implicam em

$$\mathrm{ch}'(G) \leq T_G + 1 \leq \big(\chi'(G) - 1\big) + 1 = \chi'(G).$$

Claro, $\mathrm{ch}'(G) \geq \chi'(G)$. Segue que $\mathrm{ch}'(G) = \chi'(G)$. □

7.2 Limitantes superiores para o número aresta-cromático restrito

Pelo teorema de Vizing, $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$ para todo grafo G [8, p. 103]. Assim, a conjectura 7.1 sugere que também $\mathrm{ch}'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Pode-se mostrar que $\mathrm{ch}'(G) \leq 2\Delta(G) - 1$ para todo grafo G. Ainda, como observado pelos autores de [6], se G é tal que $\Delta(G) > 2$, então $\mathrm{ch}'(G) \leq 2\Delta(G) - 2$.

Bollobás e Harris [6] foram os primeiros a obter um resultado assintótico. Eles provaram que $\mathrm{ch}'(G) \leq \frac{11}{6}\Delta(G) + o(\Delta(G))$ para todo grafo G. O limite superior para o número aresta-cromático restrito de grafos foi melhorado para $\frac{7}{4}\Delta + o(\Delta)$ por Bollobás e Hind [7], e posteriormente para $\Delta + o(\Delta)$ por Kahn [16]. Mencionamos um resultado nesta linha, obtido por Häggkvist e Janssen [14] combinando métodos probabilísticos e algébricos.

Teorema 7.5 ([14])

Todo grafo G satisfaz $\mathrm{ch}'(G) \leq \Delta + O(\Delta^{\frac{2}{3}}\sqrt{\log \Delta})$.

Para a prova deste teorema, fazendo uso de técnica similar ao método usado na prova do teorema 7.2, construímos uma classe $\mathcal{G}$ de grafos tal que para todo grafo G nesta classe o valor de $\mathrm{ch}'(G)$ é próximo de $\Delta(G)$ e estimamos o número aresta-cromático restrito para a união de grafos que pertencem a $\mathcal{G}$. Usando o Lema Local de Erdős e Lovász [2] (que é um resultado probabilístico) e alguns limitantes "padrão" da cauda da distribuição binomial mostramos que todo grafo pode ser expresso como tal união.

Referências

[1] N. Alon. Restricted colorings of graphs. In *Surveys in Combinatorics, 1993 (Keele)*, pages 1–33. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.

[2] N. Alon and J. H. Spencer. *The Probabilistic Method*. John Wiley & Sons Inc., New York, 1992. With an appendix by Paul Erdős, A Wiley-Interscience Publication.

[3] N. Alon and M. Tarsi. Colorings and orientations of graphs. *Combinatorica*, 12(2):125–134, 1992.

[4] M. Bíró, M. Hujter, and Zs. Tuza. Precoloring extension. I. Interval graphs. *Discrete Mathematics*, 100(1-3):267–279, 1992. Special volume to mark the centennial of Julius Petersen's "Die Theorie der regulären Graphs", Part I.

[5] B. Bollobás. The chromatic number of random graphs. *Combinatorica*, 8(1):49–55, 1988.

[6] B. Bollobás and A. J. Harris. List-colourings of graphs. *Graphs and Combinatorics*, 1(2):115–127, 1985.

[7] B. Bollobás and H. R. Hind. A new upper bound for the list chromatic number. *Discrete Mathematics*, 74(1-2):65–75, 1989.

[8] R. Diestel. *Graph Theory*. Springer-Verlag, New York, second edition, 2000.

[9] P. Erdős, A. L. Rubin, and H. Taylor. Choosability in graphs. In *Proceedings of the West Coast Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing (Humboldt State Univ., Arcata, Calif., 1979)*, pages 125–157, Winnipeg, Man., 1980. Utilitas Math.

[10] F. Galvin. The list chromatic index of a bipartite multigraph. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 63(1):153–158, 1995.

[11] M. R. Garey and D. S. Johnson. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-completeness*. W. H. Freeman and Co., San Francisco, Calif., 1979.

[12] H. Grötzsch. Zur Theorie der diskreten Gebilde. VII. Ein Dreifarbensatz für dreikreisfreie Netze auf der Kugel. *Wiss. Z. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg. Math.-Nat. Reihe*, 8:109–120, 1958/1959.

[13] S. Gutner. The complexity of planar graph choosability. *Discrete Mathematics*, 159(1-3):119–130, 1996.

[14] R. Häggkvist and J. Janssen. New bounds on the list-chromatic index of the complete graph and other simple graphs. *Combinatorics, Probability and Computing*, 6(3):295–313, 1997.

[15] K. Jansen and P Scheffler. Generalized coloring for tree-like graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 75(2):135–155, 1997.

[16] J. Kahn. Asymptotically good list-colorings. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 73(1):1–59, 1996.

[17] S. Lang. *Algebraic Structures*. Addison-Wesley, New York, second edition, 1967.

[18] C. McDiarmid. *Discrete Mathematics and Radio Channel Assignment*. Notas de aula, Brazilian Summer School on Combinatorics and Algorithms, Fortaleza, Brazil, 12–24 de março de 2001.

[19] T. Slivnik. Short proof of Galvin's theorem on the list-chromatic index of a bipartite multigraph. *Combinatorics, Probability and Computing*, 5(1):91–94, 1996.

[20] C. Thomassen. Every planar graph is 5-choosable. *Journal of Combinatorial Theory. Series B*, 62(1):180–181, 1994.

[21] C. Thomassen. 3-list-coloring planar graphs of girth 5. *Journal of Combinatorial Theory. Series B*, 64(1):101–107, 1995.

[22] V. G. Vizing. Coloring the vertices of a graph in prescribed colors. *Diskret. Analiz*, (29 Metody Diskret. Anal. v Teorii Kodov i Shem):3–10, 101, 1976.

[23] M. Voigt. List colourings of planar graphs. *Discrete Mathematics*, 120(1-3):215–219, 1993.

[24] M. Voigt. A not 3-choosable planar graph without 3-cycles. *Discrete Mathematics*, 146(1-3):325–328, 1995.

[25] R. Škrekovski. Choosability of K_5-minor-free graphs. *Discrete Mathematics*, 190(1-3):223–226, 1998.