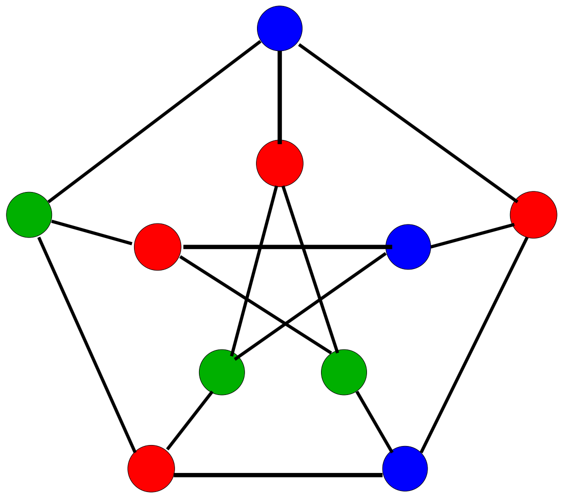
Coloração

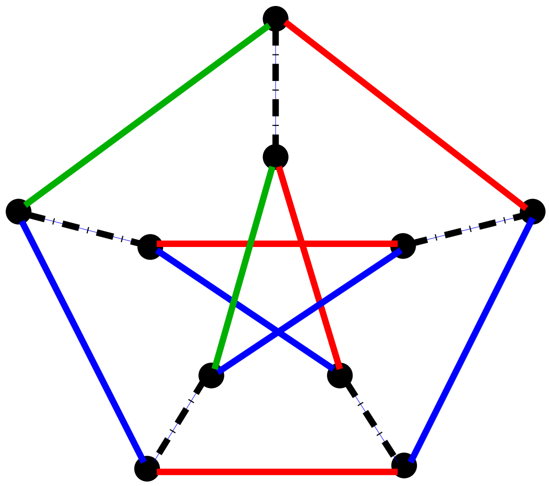
&

Grafos Aleatórios

Coloração de vértices

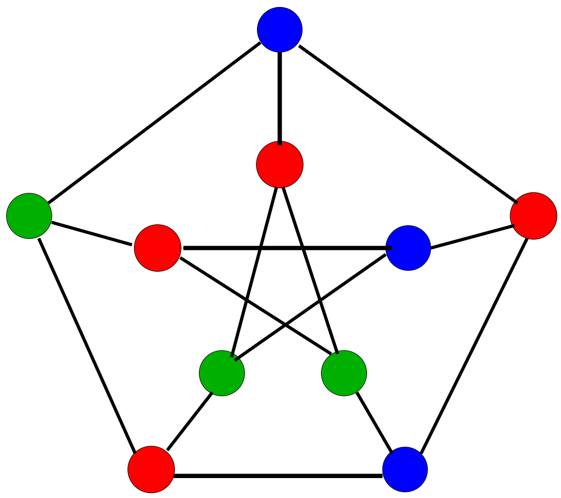


Coloração de arestas



Coloração de vértices

Uma coloração dos vértices de um grafo é uma atribuição de cores aos vértices em que vértices adjacentes recebem cores diferentes.

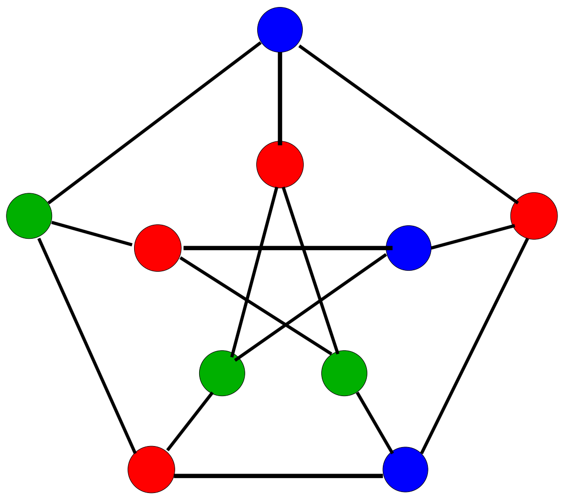


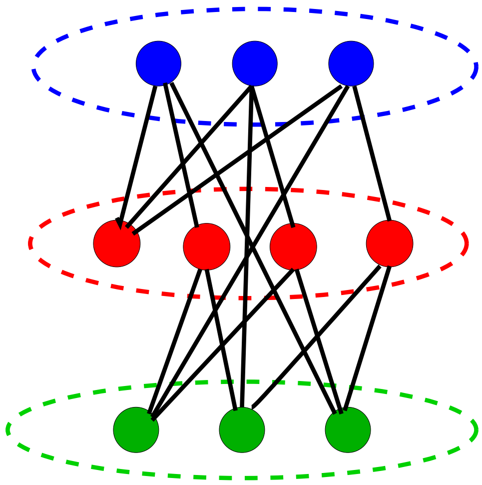
coloração dos vértices de G

$$\equiv$$

partição de $V(G)$ em conjuntos estáveis

.





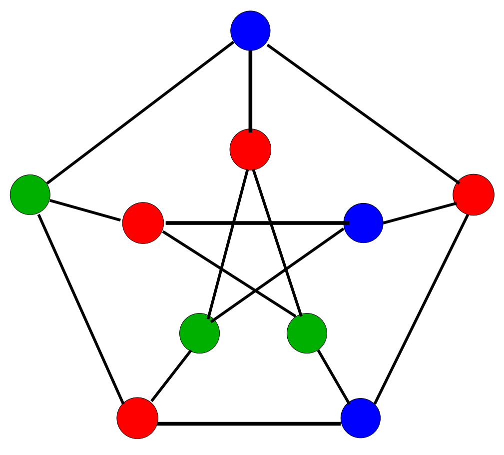
PERGUNTA 1: Dado um grafo G, é fácil encontrar uma coloração dos vértices de G?

RESPOSTA:

PERGUNTA 2: Dado um grafo G, é fácil encontrar uma coloração mínima dos vértices de G?

RESPOSTA:

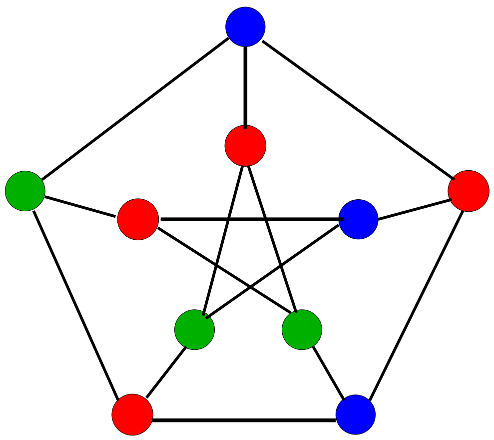
Uma coloração de vértices é mínima se o usa o menor número possível de cores.



O número cromático de um grafo G é o número de cores em uma coloração mínima dos vértices de G.

$\chi(G)$: número cromático de G

G é k-colorível se $\chi(G) \leq k$.



G: grafo de Petersen

$\chi(G) = 3$

G é 3-colorível (é 4-colorível, é 5-colorív...)

PERGUNTA:

Que relação existe entre $\chi(G)$ e outros parâmetros de G?

INTUIÇÃO:

G tem poucas arestas $\Rightarrow \chi(G)$ pequeno

Grau máximo de G pequeno $\Rightarrow \chi(G)$ pequeno

G tem cliques grandes $\Rightarrow \chi(G)$ grande

Delimitações superiores

$$\boxed{\chi(G) \;\leq\; \tfrac{1}{2} + \sqrt{2\,m(G) + \tfrac{1}{4}}.}$$

$$\boxed{\chi(G) \ \leq \ \Delta(G) + 1.}$$

Teorema de Brooks, 1941

Se G é conexo, $G \neq$ completo e
$G \neq$ circuito ímpar, então $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

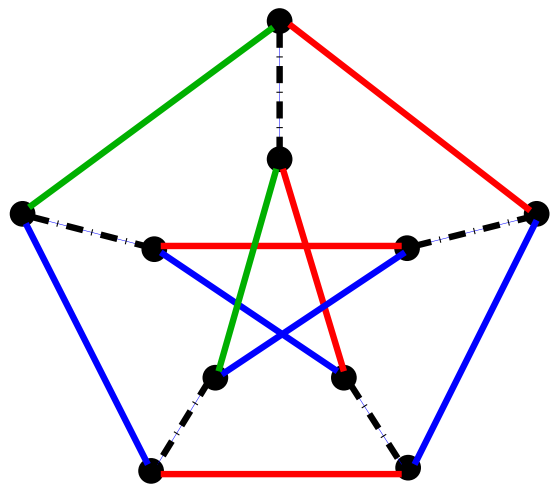
Delimitações superiores

$$\boxed{\chi(G) \geq \frac{n(G)}{\alpha(G)}.}$$

$$\boxed{\chi(G) \geq \omega(G).}$$

Coloração de arestas

Uma coloração das arestas de um grafo é uma atribuição de cores às arestas tal que arestas adjacentes recebem cores diferentes.



coloração das arestas de G

$$\equiv$$

partição de $A(G)$ em emparelhamentos

.

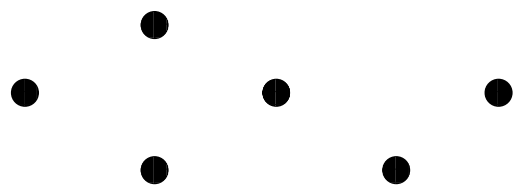
$\{E_1, \ldots, E_k\}$: partição de $A(G)$ em empar.

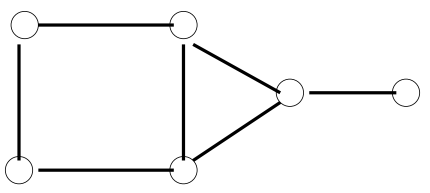
E_i é uma cor e k é o número de cores.

<u>coloração de arestas $\times$ coloração de vértices</u>

colorir arestas de $G \equiv$ colorir vértices de G'.

G': grafo das arestas de G.





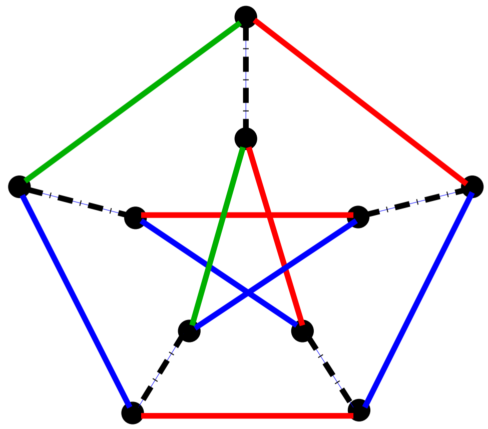
PROBLEMA 1: Dado um grafo G, é fácil encontrar uma coloração das arestas de G?

RESPOSTA:

PROBLEMA 2: Dado um grafo G, é fácil encontrar uma coloração mínima das arestas de G?

RESPOSTA:

Uma coloração de arestas é mínima se o usa o menor número possível de cores.



O índice cromático de um grafo é o número de cores de uma coloração de arestas mínima.

$\chi'(G)$: índice cromático de G

Imediato:

$\chi'(G) = \chi(G')$, onde G' é grafo das arestas de G.

Delimitação inferior: $\chi'(G) \geq \Delta(G)$.

Delimitação superior

Teorema (Vizing)

$$\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Teorema (König)

$$G \text{ bipartido} \implies \chi'(G) \leq \Delta(G).$$

Grafos aleatórios

$\mathcal{G}(n)$: coleção de todos os grafos com conjunto de vértices $V := \{1, \ldots, n\}$.

$$|\mathcal{G}(n)| = 2^N, \text{ onde } N = \binom{n}{2}.$$

"propriedade" $\mathcal{P}(n) \equiv$ "subcoleção" de $\mathcal{G}(n)$

Def: quase todo grafo tem propriedade $\mathcal{P}(n)$ se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\mathcal{P}(n)|}{|\mathcal{G}(n)|} = 1.$$

Forma de estudar $\mathcal{G}(n)$:

usar uma medida de probabilidade em $\mathcal{G}(n)$.

– Seja p um número em $(0,1)$;

– Escolha cada elemento de $V^{(2)}$ independentemente, com probabilidade p.

A: conjunto dos pares escolhidos, então

$G=(V,A)$ é um grafo aleatório em $\mathcal{G}(n)$.

A probabilidade de que G seja idêntico a um determinado elemento de $\mathcal{G}(n)$ que tenha m arestas é

$$p^m\,(1-p)^{N-m}.$$

$p=\frac{1}{2} \Rightarrow$ todos os 2^N grafos em $\mathcal{G}(n)$ são equiprováveis. Prob. de obter qualquer um deles : $1/2^N$.

Índice de estabilidade da maioria dos grafos

É surpreendentemente baixo se comparado com o número de vértices do grafo:

Teorema

Por menor que seja o número positivo ε, temos

$$\alpha(G) < (2 + \varepsilon) \log_2 n$$

para quase todo grafo G em $\mathcal{G}(n)$.

Teorema
Por menor que seja o número positivo ε, temos

$$\alpha(G) < (2+\varepsilon)\,\log_2 n$$

para quase todo grafo G em $\mathcal{G}(n)$.

PROVA:

Seja $k := \lceil (2+\varepsilon)\log_2 n \rceil$.

Seja $\mathcal{Q}(n,k)$ o conjunto dos grafos em $\mathcal{G}(n)$ para os quais $\alpha \geq k$.

Resta mostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\mathcal{Q}(n,k)|}{|\mathcal{G}(n)|} = 0. \tag{1}$$

Seja $X \subseteq V$ com k elementos.

grafos em $\mathcal{G}(n)$ nos quais X é estável

$$\updownarrow$$

subconjuntos de $V^{(2)} \setminus X^{(2)}$

Logo, X é estável em 2^{N-K} dos grafos, onde $K := \binom{k}{2}$.

Como V tem $\binom{n}{k} \leq n^k$ subconj. de cardinalidade k, temos

$$|\mathcal{Q}(n,k)| \;\leq\; n^k\, 2^{N-K}$$

e portanto

$$\frac{|\mathcal{Q}(n,k)|}{|\mathcal{G}(n)|} \;\leq\; n^k\, 2^{-k(k-1)/2}.$$

Assim

$2\log_2\left(\frac{|\mathcal{Q}(n,k)|}{|\mathcal{G}(n)|}\right) \leq$

$$\begin{aligned} &\leq 2k\log_2 n - k(k-1) \\ &= k\,(1+2\log_2 n - k) \\ &= \lceil(2+\varepsilon)\log_2 n\rceil\,(1-\varepsilon\log_2 n). \end{aligned}$$

Como $\lim_{n\to\infty}(1-\varepsilon\log_2 n) = -\infty$, temos

$$\lim_{n\to\infty}\log_2\frac{|\mathcal{Q}(n,k)|}{|\mathcal{G}(n)|} = -\infty,$$

o que prova (1).

Teorema
Por menor que seja o número positivo ε, temos

$$\alpha(G) < (2+\varepsilon)\log_2 n$$

para quase todo grafo G em $\mathcal{G}(n)$.

Exemplo:

se $\varepsilon = 1$ e $n = 1024$ então,
$(k = 30)$

$$|\mathcal{Q}(1024, 30)| \leq 2^{-135}|\mathcal{G}(1024)|$$

ou seja, uma fração de pelo menos $1 - 2^{-135}$ (mais que $1 - 10^{-40}$) dos grafos em $\mathcal{G}(1024)$ têm $\alpha < 30$.

Número cromático da maioria dos grafos

É surpreendentemente alto se comparado com o número de vértices do grafo.

Teorema Por menor que seja o número positivo ε, temos

$$\chi(G) > \frac{1}{2+\varepsilon} \frac{n}{\log_2 n}$$

para quase todo grafo G em $\mathcal{G}(n)$.

PROVA: De acordo com a delimitação já vista,

$$\chi(G) \geq \frac{n}{\alpha(G)}$$

para todo grafo G. O resultado segue usando o teorema anterior.

Exemplo: Se $\varepsilon = 1$ e $n = 1024$, temos $|\mathcal{Q}(1024, 30)| \leq 2^{-135}|\mathcal{G}(1024)|$ e portanto uma fração de pelo menos $1 - 2^{-135}$ (mais que $1 - 10^{-40}$) dos grafos em $\mathcal{G}(1024)$ têm $\chi \geq 35 = \lceil\frac{1024}{30}\rceil$.

Pode-se mostrar

que a delimitação inferior dada pelo teorema acima é bastante justa:

Teorema (Bollobás)
por menor que seja o número ε em $(0, 2)$, quase todo grafo G em $\mathcal{G}(n)$ é tal que

$$\chi(G) < \frac{1}{2-\varepsilon}\frac{n}{\log_2 n}.$$