Capítulo 1

Conceitos e Resultados Básicos

Um **grafo** é um par ordenado (V, A), onde V e A são conjuntos disjuntos, e cada elemento de A corresponde a um par não-ordenado de elementos (não necessariamente distintos) de V. Os elementos do conjunto V são chamados **vértices** e os elementos do conjunto A são chamados **arestas**.

(V, A)

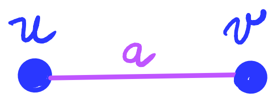
cjto de vértices — cjto de arestas

$V \cap A = \emptyset$

$a \in A \longrightarrow \{u, v\}$ $\quad u, v \in V$

Quando uma aresta a corresponde a um par $\{u, v\}$ de vértices, denotamos isso escrevendo $a = \{u, v\}$. Também escrevemos simplesmente uv para nos referirmos a uma tal aresta, quando não há perigo de confusão.

$a = \{u, v\}$ ou $a = uv$



Mais formalmente, pode-se explicitar a correspondência entre as arestas e os pares de vértices que as definem através de uma **função de incidência**, digamos

$$\psi : A \to V^{(2)},$$

onde $V^{(2)} = \{\{u, v\} : u, v \in V\}$. Assim, quando escrevemos $a = \{u, v\}$ estamos considerando que $\psi(a) = \{u, v\}$. Por simplicidade (e por não ser necessário) aqui não explicitaremos tal função de incidência; e quando conveniente, consideraremos que o conjunto A de arestas é um subconjunto de $V^{(2)}$. [Comentaremos quando pode ser necessário explicitar tal função.]

no material que estudaremos

Ex1

Grafo (V, A)

$\downarrow$

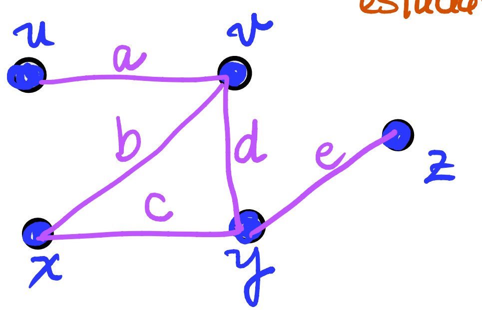
tripla (V, A, ψ)

$V = \{u, v, x, y, z\}$

$A = \{a, b, c, d, e\}$

$\psi : A \to V^{(2)}$

função de incidência



$\psi(a) = uv$ $\quad$ $\psi(c) = xy$ $\quad$ $\psi(e) = yz$

$\psi(b) = vx$ $\quad$ $\psi(d) = vy$

Neste caso, poderíamos escrever simplesmente

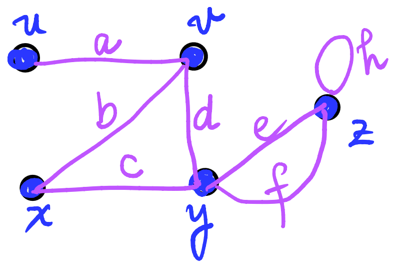
$V = \{u, v, x, y, z\}$

$A = \{uv, vx, xy, vy, yz\}$

$A \subseteq V^{(2)}$

Quando a função de incidência ψ pode ser necessária ou conveniente

Ex2



$V = \{u, v, x, y, z\}$

$A = \{a, b, c, d, e, f, h\}$

(V, A, ψ)

$\psi(a) = uv$ $\quad$ $\psi(d) = vy$ $\quad$ $\psi(h) = zz$

$\psi(b) = vx$ $\quad$ $\psi(e) = yz$

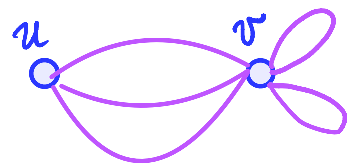
$\psi(c) = xy$ $\quad$ $\psi(f) = yz$

Se tivermos, por ex, custos/pesos associados às arestas

$c(e) = 5$

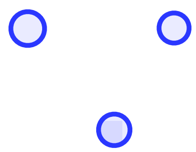
$c(f) = 7$

precisamos ter nomes diferentes para arestas que correspondem a um mesmo par de vértices

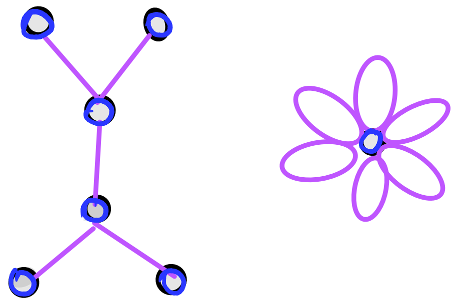


Pergunta: em qual dos exemplos a seguir não precisamos da função ψ ?

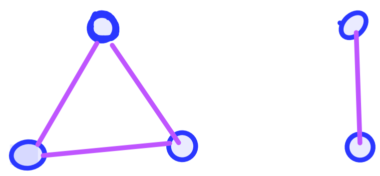
Ex3



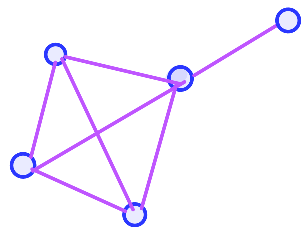
Ex4



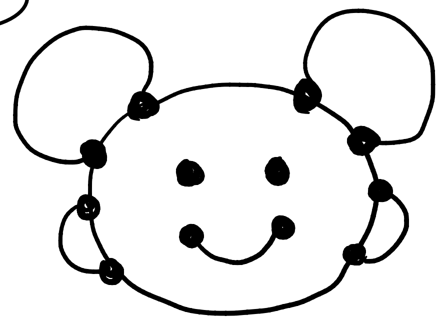
Ex5



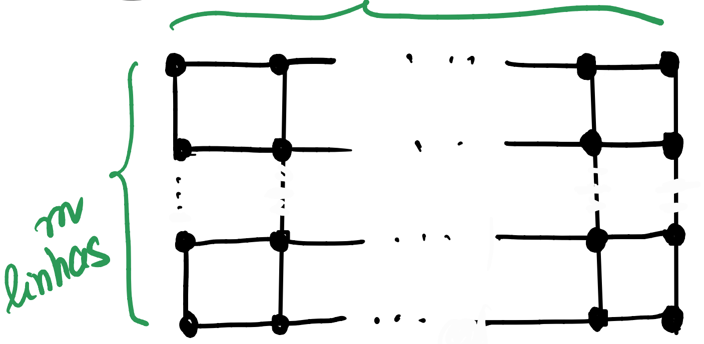
Ex6



Ex7



Ex8



Como definir ? $G_{m,n}$ grade m por n

Como definir V e A de forma apropriada?

$$G_{m,n} = (V, A)$$

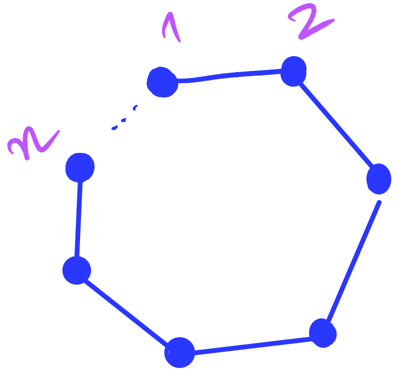
Notação: Se $k \in \mathbb{Z}_+$, $[k] = \{1, 2, \dots, k\}$

$V = \{ (i,j) : i \in [m] \text{ e } j \in [n] \}$ e

$A = \{ \{(i,j),(k,\ell)\} : (i,j) \in V, (k,\ell) \in V$ e

$[(i = k \text{ e } |j-\ell| = 1) \text{ ou } (|i-k| = 1 \text{ e } j = \ell)] \}$.

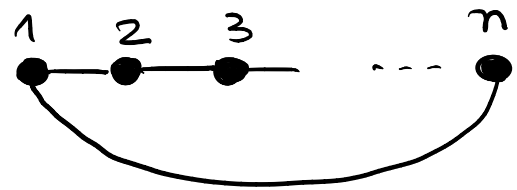
Ex 9



n vértices, $n \geq 3$

$V = \{1, 2, \dots, n\}$, $n \geq 3$.

$A = \{ \{i, (i+1) \bmod n\} : i \in [n] \}$



Convenção: Se G é um grafo, então também denotamos o seu conjunto de vértices por $V(G)$, e o seu conjunto de arestas por $A(G)$. Assim, tendo o nome de um grafo, ainda que os nomes do seu conjunto de vértices e do seu conjunto de arestas nao sejam explicitados, podemos sempre nos referir a esses objetos dessa forma.

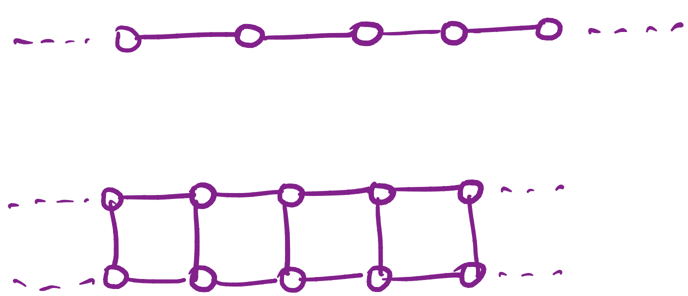
Grafo G $V(G)$ $A(G)$

Grafo H $V(H)$ $A(H)$

Grafos G, G', G_1, G_2
$H, H',$

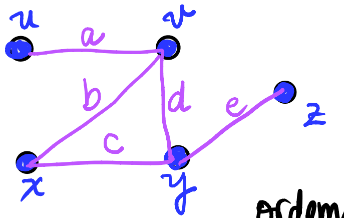
Estudaremos apenas os grafos **finitos**: aqueles que têm um número finito de vértices e de arestas. Nesta disciplina, Mesmo que isso não seja dito explicitamente, deve ficar subentendido. (Existem grafos infinitos.)

Ex: grafos infinitos



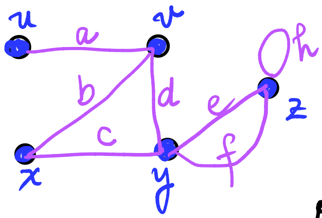
A **ordem** de um grafo $G = (V, A)$ é a cardinalidade de V; o seu **tamanho** é a soma $|V| + |A|$.

Ex1



ordem = 5
tamanho = 10

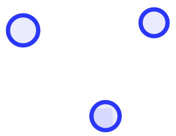
Ex2



não é padrão

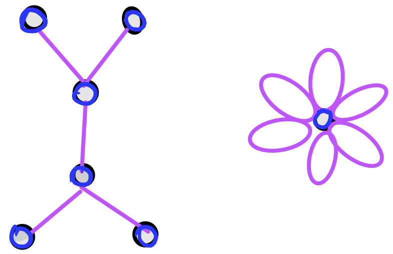
ordem = 5
tamanho = 12

Ex3



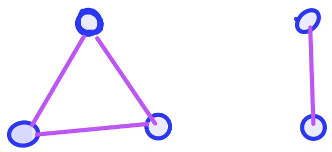
ordem = 3
tamanho = 3

Ex4



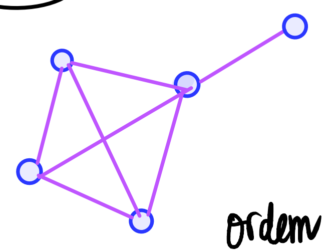
ordem = 7
tamanho = 18

Ex5



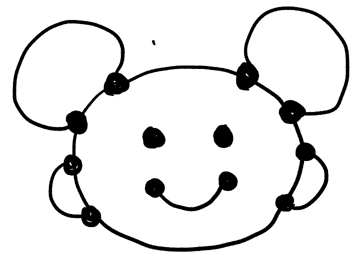
ordem = 5
tamanho = 9

Ex6



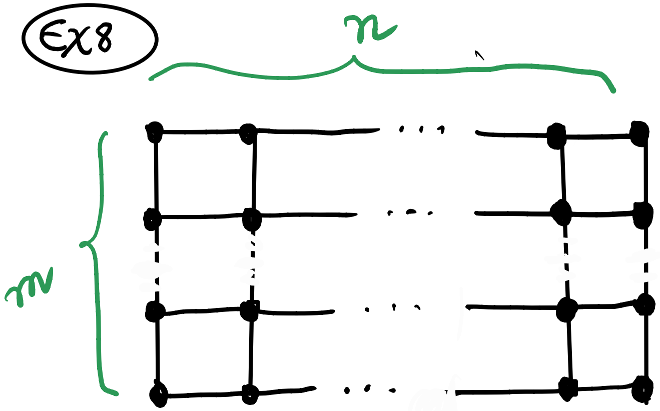
ordem = 5
tamanho = 7

Ex7



ordem = 12
tamanho = 25

Ex8



Grade $G_{m,n}$

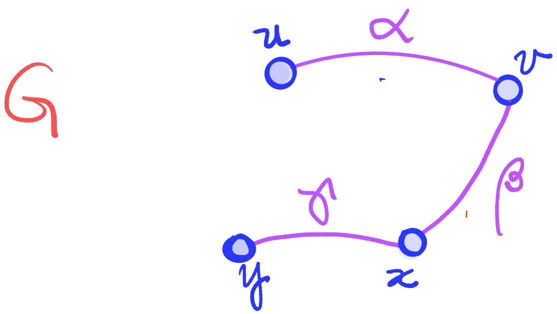
ordem = ...
tamanho = ...

completar!

• Adjacência e incidência de vértices e arestas

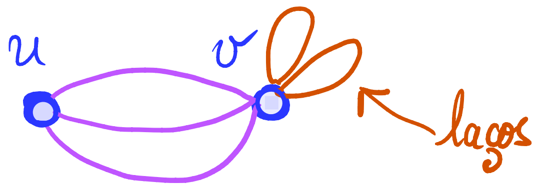
Se $\alpha = \{u, v\}$ é uma aresta de um grafo, dizemos que α **vai de** u **para** v, ou **liga** os vértices u e v, ou **incide em** u (e em v). Também dizemos que u e v são os **extremos** (ou as **pontas**) de α; que u e v são **adjacentes** (ou **vizinhos**), e que u é **adjacente** a v.

Arestas com um extremo em comum são chamadas **adjacentes**; arestas com os mesmos extremos são chamadas **paralelas** ou **múltiplas**. Uma aresta com extremos iguais é um **laço**.



u e v são adjacentes ou vizinhos

α e β são adjacentes



arestas paralelas (ou múltiplas)

Pares de vértices (arestas) não-adjacentes são ditos **independentes**. Um conjunto de vértices (arestas) independentes é chamado **independente**. No caso de vértices, um conjunto independente é também chamado **estável**.

u e x são independentes $\qquad$ α e γ são independentes

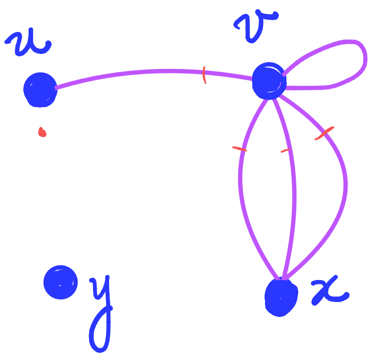
$\{u, x\}$ é um cjto independente (ou estável)

• Grau de vértices e de grafos

O **grau** de um vértice v, denotado por $g_G(v)$, é o número de arestas que incidem em v, onde os laços são contados duas vezes. Um vértice de grau zero é chamado **isolado**. Se o grafo a que estamos nos referindo é óbvio pelo contexto, o grau de um vértice v nesse grafo é denotado simplesmente por $g(v)$.

O **grau mínimo** de um grafo G é o número $\delta(G) := \min\{g(v) : v \in V(G)\}$; e o **grau máximo** de G é o número $\Delta(G) := \max\{g(v) : v \in V(G)\}$. O **grau médio** de G é o número $\bar{g}(G) := \frac{1}{|V(G)|} \Sigma_{v \in V(G)}\, g(v)$.

G



$g(u) = 1$

$g(v) = 6$

$g(x) = 3$

$g(y) = 0$

$\delta(G) = 0$

$\Delta(G) = 6$

$\bar{g}(G) = \dfrac{1+6+3+0}{4} = 5/2$

grau médio

Proposição 1.1. *Para todo grafo G temos que* $\Sigma_{v \in V(G)}\, g(v) = 2\,|(A(G)|$. *Ou seja, a soma dos graus dos vértices de um grafo é igual ao dobro do número de suas arestas.*

Prova. No somatório $\sum_{v \in V(G)} g(v)$, cada aresta $\alpha = \{u, v\}$ de G contribui com exatamente 2 unidades. Se $u \neq v$ então α contribui com 1 unidade para $g(u)$ e 1 unidade para $g(v)$; e se $u = v$ (α é um laço) então α contribui com 2 unidades para $g(u)$. Portanto, $\sum_{v \in V(G)} g(v) = 2|A(G)|$. ■

Corolário 1.2 *Todo grafo tem um número par de vértices de grau ímpar.*

(Handshaking Lemma)

Em qualquer festa sempre há um nº par de pessoas que cumprimentam um nº ímpar de pessoas.

Prova. Seja G um grafo arbitrário, e sejam

$$V_1 = \{v \in V(G) : g(v) \text{ é ímpar}\},$$
$$V_2 = \{v \in V(G) : g(v) \text{ é par}\}.$$

Neste caso, $\sum_{v \in V(G)} g(v) = \sum_{v \in V_1} g(v) + \sum_{v \in V_2} g(v)$.

Claramente, $\sum_{v \in V_2} g(v)$ é par. Como $\sum_{v \in V(G)} g(v)$ é par (pela Proposição 1.1), temos que $\sum_{v \in V_1} g(v)$ é par. Logo, $|V_1|$ é par. ■

EXERCÍCIO 1. *Prove que se G é um grafo sem vértices isolados e $|A(G)| < |V(G)|$, então G tem pelo menos 2 vértices de grau 1.*

EXERCÍCIO 2. *Seja G um grafo de ordem $n \geq 2$. Prove que se G tem pelo menos $n+1$ arestas então G possui um vértice com grau pelo menos 3.*

hipótese — tese

$$\underbrace{\left.\begin{array}{c}G \text{ grafo sem vértices isolados}\\ |A(G)| < |V(G)|\end{array}\right\}}_{A} \Longrightarrow \underbrace{\begin{array}{c}G \text{ tem pelo menos}\\ 2 \text{ vértices de grau } 1\end{array}}_{B}$$

Técnica de prova

$$\boxed{A \Longrightarrow B}$$

equiv.

$$\boxed{A \text{ e } \neg B \Longrightarrow \text{contradição!}}$$

Suponha que G satisfaz A e <u>não satisfaz B</u>. (Objetivo: chegar numa contradição.)

G não satisfaz B $\cong$ G não tem pelo menos 2 vértices de grau 1.

$\cong$

caso 1 - G tem 0 vértices de grau 1.

caso 2 - G tem exatamente 1 vértice de grau 1.

Caso 1: Neste caso, $g(v) \geq 2$ para todo vértice v em G (já que G não tem vértices isolados e não tem vértices de grau 1).

Então $\sum_{v \in V(G)} g(v) \geq 2|V(G)|$.

Combinando a Proposição 1.1 com a desigualdade acima, temos que

$$2|A(G)| \geq 2|V(G)|.$$

Portanto, $|A(G)| \geq |V(G)|$. Isto é uma contradição, pois supusemos que $|A(G)| < |V(G)|$.

$\boxed{\text{Caso 2}}$: Neste caso, G tem um vértice de grau 1 e todos os seus demais têm grau pelo menos 2.

Então
$$\sum_{v \in V(G)} g(v) \geq 1 + 2\left(|V(G)| - 1\right) = 2|V(G)| - 1 .$$

Combinando a Proposição 1.1 com a desigualdade acima, temos que
$$2|A(G)| \geq 2|V(G)| - 1 ,$$

ou seja,
$$|A(G)| \geq |V(G)| - 1/2 .$$

Portanto, $|A(G)| \geq |V(G)|$. Isto é uma contradição, pois supusemos que $|A(G)| < |V(G)|$. ∎

OBS: Podemos tratar o Caso1 e Caso2 juntos.

G não satisfaz B $\cong$ G tem k vértices de grau 1, onde $k \leq 1$.

$k=0 \to$ Caso 1
$k=1 \to$ Caso 2

Então

$$\sum_{v \in V(G)} g(v) \geq k + 2(|V(G)| - k).$$

A Proposição 1.1 combinada com a desigualdade acima implica que

$$2|A(G)| \geq 2|V(G)| - k,$$

ou seja,

$$|A(G)| \geq |V(G)| - k/2.$$

Como $k \in \{0,1\}$, concluímos que

$$|A(G)| \geq |V(G)|,$$

contrariando a hipótese de que $|A(G)| < |V(G)|$.

Com isso, completamos a prova do Exercício 1.

OBS: Podemos tratar o Caso1 e Caso2 juntos.

G não satisfaz B $\cong$ G tem k vértices de grau 1, onde $k \leq 1$.

$k=0 \to$ Caso 1
$k=1 \to$ Caso 2

Então
$$\sum_{v \in V(G)} g(v) \geq k + 2(|V(G)| - k).$$

A Proposição 1.1 combinada com a desigualdade acima implica que
$$2|A(G)| \geq 2|V(G)| - k,$$
ou seja,
$$|A(G)| \geq |V(G)| - k/2.$$

Como $k \in \{0,1\}$, concluímos que
$$|A(G)| \geq |V(G)|,$$
contrariando a hipótese de que $|A(G)| < |V(G)|$.

Com isso, completamos a prova do Exercício 1. $\blacksquare$

OBS: Podemos tratar o Caso1 e Caso2 junto.

G não satisfaz B $\cong$ G tem k vértices de grau 1, onde $k \leq 1$.

$k=0 \to$ Caso 1
$k=1 \to$ Caso 2

Então
$$\sum_{v \in V(G)} g(v) \geq k + 2\left(|V(G)| - k\right).$$

A Proposição 1.1 combinada com a desigualdade acima implica que

$$2|A(G)| \geq 2|V(G)| - k,$$

ou seja,

$$|A(G)| \geq |V(G)| - k/2.$$

Como $k \in \{0,1\}$, concluímos que

$$|A(G)| \geq |V(G)|,$$

contrariando a hipótese de que $|A(G)| < |V(G)|$.

Com isso, completamos a prova do Exercício 1.