2 EMPARELHAMENTOS

Um conjunto de arestas M de um grafo G é chamado de **emparelhamento** se para cada vértice $v \in V(G)$ existe no máximo uma aresta de M incidente a v. A teoria de emparelhamentos em grafos é uma área bastante estabelecida, com resultados em várias direções [PL86, CCPS11] e generalizações[1]. Nestas notas apresentamos alguns resultados clássicos com o objetivo de compreender a decomposição de Edmonds–Gallai e o algoritmo de Edmonds para obter emparelhamentos máximos em grafos quaisquer.

Dado um emparelhamento M e um vértice v, dizemos que M **cobre** (ou **satura**) v se alguma aresta de M incide em v. Caso contrário, dizemos que v é um vértice **não-coberto** por M ou **livre** (de M). Dizemos que um emparelhamento M em G é **maximal** se não existe emparelhamento M' que contém M propriamente. Um emparelhamento M é dito **máximo** se não existe em G nenhum emparelhamento de cardinalidade maior que a de M.

Em geral, estamos interessados em determinar condições para a existência de emparelhamentos que cobrem todos os vértices do grafo. Tais emparelhamentos são ditos **perfeitos**. Apresentamos ainda fórmulas explícitas para o cálculo da cardinalidade $\mathrm{Emp}(G)$ de um emparelhamento máximo de G, e um algoritmo para obter um emparelhamento máximo.

Dado um emparelhamento M de um grafo G, um **caminho M-alternante** em G é um caminho cujas arestas estão alternadamente em M e e em $E(G) \setminus M$. Um tal caminho com ambos os extremos não-cobertos por M é chamado **caminho aumentador** (nome motivado pelo Teorema de Berge, enunciado a seguir).

Teorema 2.1 (Berge, 1957). *Seja G um grafo e M um emparelhamento em G. Então M é um emparelhamento máximo se e só se G não tem nenhum caminho M-alternante com ambos os extremos livres.*

2.1 EMPARELHAMENTOS PERFEITOS

Teorema 2.2 (Hall, 1935). *Seja G um grafo (A, B)-bipartido. Então G tem um emparelhamento que cobre A se e somente se $|\mathrm{Adj}(X)| \geq |X|$ para todo $X \subseteq A$.*

Demonstração. Demonstramos apenas uma das implicações. Suponha que não exista emparelhamento que cobre A, e seja M um emparelhamento máximo de G. Então existe vértice $v \in A$ que não é coberto por M. Considere $A' \cup B'$ ($A' \subseteq A$, $B' \subseteq B$) o conjunto de vértices de G que são atingíveis a partir de v por caminhos M-alternantes. Como G é bipartido, todo caminho de v até $a \in A'$ tem comprimento par. Logo, a é emparelhado com o vértice que vem exatamente antes dele em todos esses caminhos que o atingiram. Assim, todo vizinho de a está em B' e, portanto, $\mathrm{Adj}(A') \subseteq B'$. Por outro lado, $B' \subseteq \mathrm{Adj}(A')$, e portanto, $\mathrm{Adj}(A') = B'$. Por hipótese, temos que $|\mathrm{Adj}(A')| \geq |A'|$; logo, $|B'| \geq |A'|$ e, assim, como $v \in A'$ não está coberto por M, existe pelo menos um vértice b em B' que não está coberto por M. O caminho M-alternante de v a b tem comprimento ímpar e, portanto, é aumentador. Pelo Teorema 2.1, M não é um emparelhamento máximo, uma contradição. □

Corolário 2.3 *Seja G um grafo (A, B)-bipartido. Se $|\mathrm{Adj}(X)| \geq |X| - k$ para todo $X \subseteq A$ e algum inteiro fixo k, então G possui um emparelhamento de cardinalidade $|A| - k$.*

Demonstração (sugestão). Adicione k vértices a B, conectados cada um a todos os vértices de A. □

Um conjunto S de vértices de um grafo G é dito uma **cobertura** (por vértices) se toda aresta de G é incidente a pelo menos um vértice de S. O tamanho de uma menor cobertura de G é denotado por $\mathrm{Cob}(G)$. É fácil ver que $|S| \geq |M|$, para qualquer emparelhamento M. O seguinte teorema estabelece a célebre relação min–max entre coberturas e emparelhamentos [Die05, BM08].

Teorema 2.4 (Kőnig, 1931). *Seja G um grafo bipartido. A cardinalidade de um emparelhamento máximo de G é igual à cardinalidade de uma cobertura mínima de G.*

Demonstração. Demonstraremos que $\mathrm{Emp}\, G \geq \mathrm{Cob}(G)$. A outra desigualdade é um exercício. Seja G um grafo (A, B)-bipartido e C uma cobertura mínimade G. Definimos os conjuntos

$$A_C = A \cap C, \quad B_C = B \cap C, \quad A_{\overline{C}} = A \setminus C, \quad \text{e} \quad B_{\overline{C}} = B \setminus C.$$

Seja H o subgrafo de G induzido por $A_C \cup B_{\overline{C}}$. É claro que H é $(A_C, B_{\overline{C}})$-bipartido. Mostramos a sequir que a minimalidade de C garante que H satisfaz a hipótese do Teorema de Hall.

Seja X um subconjunto qualquer de A_C. Note que o conjunto $(C \setminus X) \cup \mathrm{Adj}_H(X)$ é uma cobertura de G(observe que toda aresta que tem uma ponta em X tem a outra ponta em $\mathrm{Adj}_H(X)$). Como a cardinalidade dessa cobertura é $|C| - |X| + |\mathrm{Adj}_H(X)|$, a minimalidade de C implica que $|\mathrm{Adj}_H(X)| \geq |X|$.

Pelo Teorema de Hall, existe um emparelhamento F em H que cobre A_C. De maneira análoga, podemos concluir que o subgrafo H' de G induzido por $B_C \cup A_{\overline{C}}$ possui um emparelhamento F' que cobre B_C. Ademais, $F \cup F'$ é um emparelhamento em G e

$$\mathrm{Emp}(G) \geq |F \cup F'| = |F| + |F'| = |A_C| + |B_C| = |C| = \mathrm{Cob}(G). \quad \square$$

Dado um grafo H, denotamos por $c_o(H)$ o número de componentes (conexas) de H que têm um número ímpar de vértices. O teorema a seguir fornece uma condição para a existência de emparelhamentos perfeitos em grafos arbitrários em termos do número de tais componentes.

Exercício 2.1. Demonstre o Teorema de Hall de duas formas:

i) Por indução em $|A|$, dividindo o estudo em dois casos: (1). existe conjunto de vértices $S \subseteq A$ com $|\mathrm{Adj}(S)| = |S|$, e (2). para todo $S \subseteq A$ vale $|\mathrm{Adj}(S)| > |S|$.
ii) Usando o Teorema de Kőnig.

Teorema 2.5 (Tutte, 1947). *Um grafo $G = (V, E)$ tem um emparelhamento perfeito se e só se $c_o(G - S) \leq |S|$ para todo $S \subseteq V$.*

Demonstração. Em aula. [A ser incluído aqui.] $\square$

Exercício 2.2. Deduza o Teorema de Hall do Teorema de Tutte.

Exercício 2.3. Um **grafo cúbico** é um grafo em que todo vértice possui grau 3. Prove que todo grafo cúbico sem arestas-de-corte tem um emparelhamento perfeito (Petersen, 1891). *Sugestão:* mostre que tal grafo satisfaz a condição do Teorema 2.5.

2.2 Emparelhamentos máximos e a deficiência de um grafo

Dado um grafo (A, B)-bipartido G e um conjunto $X \subseteq A$, dizemos que $|X| - |\mathrm{Adj}(X)|$ é a **deficiência** de X (com relação a A), e a denotamos por $\mathrm{def}_A(X)$. Definimos a **A-Deficiência de G** por $\mathrm{Def}_A(G) = \max_{X \subseteq A} \mathrm{def}_A(X)$. Note que a A-Deficiência de G é não-negativa, uma vez que, para $X = \varnothing$, temos $\mathrm{def}_A(X) = 0$.

Em 1955, Ore [Ore55] publicou uma "versão defectiva" do *Teorema de Hall* para grafos bipartidos. Em 1958, Berge obteve uma versão generalizada para grafos arbitrários, tendo como base o Teorema de Tutte.

Teorema 2.6 (Ore, 1955). Se G é um grafo (A, B)-bipartido, então

$$\mathrm{Emp}(G) = |A| - \mathrm{Def}_A(G).$$

Demonstração. A desigualdade $\mathrm{Emp}(G) \leq |A| - \mathrm{Def}_A(G)$ segue diretamente da definição de $\mathrm{Def}_A(G)$; a desigualdade $\mathrm{Emp}(G) \geq |A| - \mathrm{Def}_A(G)$ segue do Corolário 2.3. □

O Teorema 2.6 afirma que se G é um grafo (A, B)-bipartido então a sua A-Deficiência (resp. B-Deficiência) é exatamente o número de vértices em A (resp. B) que não são cobertos por um emparelhamento máximo.

Definindo-se a **Deficiência de** G, $\mathrm{Def}(G)$, onde G é (A, B)-bipartido, como sendo $\mathrm{def}_A(G) + \mathrm{def}_B(G)$, temos que $\mathrm{Def}(G) = \mathrm{def}_A(G) + \mathrm{def}_B(G) = (|A| - \mathrm{Emp}(G)) + (|B| - \mathrm{Emp}(G)) = |A \cup B| - 2\,\mathrm{Emp}(G) = |V(G)| - 2\,\mathrm{Emp}(G)$.

Esta igualdade motiva a definição de **Deficiência** de um grafo arbitrário G, que mencionamos na próxima subseção.

2.3 DEFICIÊNCIA EM GRAFOS ARBITRÁRIOS

Seja M um emparelhamento em G. Definimos o **defeito de** M como sendo o número de vértices não cobertos por M. Definimos a **Deficiência de** G, $\mathrm{Def}(G)$, como sendo o número de vértices não cobertos por um emparelhamento máximo, isto é,

$$\begin{aligned} \mathrm{Def}(G) &= |V| - 2\,\mathrm{Emp}(G), \\ &= \min_{M \in \mathcal{M}} \{|V| - 2|M|\}, \end{aligned}$$

onde $\mathcal{M}$ é o conjunto dos emparelhamentos de G. Em 1958, Berge [] provou o teorema a seguir, conhecido como **Fórmula de Berge**.

Teorema 2.7 (Fórmula de Berge). Para todo grafo $G = (V, E)$, tem-se que

$$\mathrm{Def}(G) = \max_{S \subseteq V} \{c_o(G - S) - |S|\}. \tag{2.1}$$

O Teorema 2.7 é consequência do teorema a seguir, que quantifica o tamanho de um emparelhamento máximo em im grafo arbitrário.

Teorema 2.8 (Fórmula de Tutte-Berge). Para todo grafo G=(V,E) temos que

$$\mathrm{Emp}(G) = \min_{S \subseteq V} \left\{ \frac{|V| + |S| - c_o(G - S)}{2} \right\}. \tag{2.2}$$

Demonstração. É suficiente provarmos para o caso em que G é conexo. Suponha então que G seja conexo. Primeiramente, demonstramos que $\mathrm{Emp}(G) \leq \frac{1}{2} \min_{S \subseteq V} \{|V| + |S| - c_o(G - S)\}$. Se para todo $S \subseteq V$ tem-se que $|S| \geq c_o(G - S)$, pelo Teorema de Tutte, G tem um emparelhamento perfeito, e portanto a desigualdade vale. Se existe $S \subseteq V$ tal que $c_o(G - S) > |S|$, então pelo menos $c_o(G - S) - |S|$ vértices devem ficar livres em qualquer emparelhamento de G. Assim, G tem no máximo $|V| - c_o(G - S) - |S|$ vértices cobertos, ou seja, temos no máximo $\frac{1}{2}(|V| - c_o(G - S) + |S|)$ arestas em um emparelhamento, donde segue que $\mathrm{Emp}(G) \leq \frac{1}{2} \min_{S \subseteq V} \{|V| + |S| - c_o(G - S)\}$.

A demonstração de $\mathrm{Emp}(G) \geq \frac{1}{2} \min_{S \subseteq V} \{|V| + |S| - c_o(G - S)\}$ segue por indução no número de vértices $|V|$. Se $|V| = 1$ a fórmula é óbvia, e ambos os lados resultam 0. Suponha então que $|V| > 1$ e que o teorema valha para todo grafo com menos vértices do que G. Consideramos dois casos.

Caso 1. Existe um vértice v que é coberto por todo emparelhamento máximo de G. Seja M um tal emparelhamento. Considere o grafo $G' = G - v$ obtido de G pela remoção do vértice v. Seja $V' = V \setminus \{v\}$. Seja e a aresta de M que cobre v e tome o emparelhamento $M' = M - e$ de G'.

Se existe emparelhamento de G' de tamanho $|M'|+1 = |M| = \mathrm{Emp}(G)$, então existe emparelhamento máximo em G que não emparelha v. Logo, $\mathrm{Emp}(G') = \mathrm{Emp}(G)-1$. Pela hipótese de indução, existe $S' \subseteq V'$ tal que $|V'|+|S'|-c_o(G'-S') = 2|M'|$. Considere o conjunto $S = S' \cup \{v\} \subseteq V$ e observe que, uma vez que $G' = G-v$, temos que $G'-S' = G-v-S' = G-S$. Logo, temos que $c_o(G'-S') = c_o(G-S)$ e, portanto,

$$
\begin{aligned}
|M| \quad = \quad |M'|+1 \quad &= \frac{|V'|+|S'|-c_o(G'-S')}{2}+1 \\
&= \frac{(|V'|+1)+(|S'|+1)-c_o(G'-S')}{2} \\
&= \frac{|V|+|S|-c_o(G-S)}{2} \\
&\geq \min_{S\subseteq V}\left\{\frac{|V|+|S|-c_o(G-S)}{2}\right\}.
\end{aligned}
$$

Caso 2. Todo vértice de G não é coberto por algum emparelhamento máximo. Vamos provar que *exatamente* um vértice fica livre em cada emparelhamento máximo.

Suponha que para todo emparelhamento máximo existam dois vértices livres. Tome então um emparelhamento máximo M tal que a distância $\mathrm{d}(u,v)$ entre dois vértices livres u e v seja mínima. A distância entre u e v não pode ser 1, caso contrário podemos adicionar a aresta uv a M e obter um emparelhamento maior. Além disso, todo vértice interior num caminho de menor comprimento entre u e v deve ser coberto por M, caso contrário existiria um par de vértices livres com distância menor que $\mathrm{d}(u,v)$. Tome s um tal vértice e tome N um emparelhamento máximo de G que não cobre s e tal que $M \cap N$ seja o maior possível. Note, em particular, que u e v são cobertos por N (e *não* são cobertos por M). Ora, como a cardinalidade de M e N é a mesma, existe um vértice $x \neq s$ que é coberto por M, mas não é coberto por N.

Seja $y \in V(G)$ o vértice emparelhado com x em M. Se y não for coberto por N podemos adicionar a aresta xy a N, entrando em contradição com a maximalidade de N. Se y for coberto por N, podemos retirar de N a aresta que o cobre e adicionar xy em seu lugar, obtendo um emparelhamento N' com uma interseção maior com M.

Concluímos que todo emparelhamento máximo deixa livre exatamente um vértice. Portanto, $\mathrm{Emp}(G) = (|V|-1)/2$. A Fórmula de Tutte-Berge segue tomando $S = \emptyset$. $\square$

No Caso 2 da demonstração do Teorema 2.8, encontramos um grafo G tal que $G-v$ possui um emparelhamento perfeito para todo $v \in V(G)$. Neste caso, dizemos que G é **hipoemparelhável**. Mais geralmente, se $\mathcal{B}$ é uma propriedade sobre grafos, dizemos que um grafo G é **hipo-$\mathcal{B}$** se G não tem a propriedade $\mathcal{B}$, mas $G-v$ tem a propriedade $\mathcal{B}$ para todo vértice v de G.

Na busca de um emparelhamento com cardinalidade máxima, nos deparamos com a questão de saber, dado um emparelhamento M, se é possível encontrar um emparelhamento maior. O Teorema 2.7 nos dá uma ideia de como proceder. Note que, para todo conjunto S, a fórmula fornece um limitante inferior para o número de vértices não-cobertos por um emparelhamento máximo. Sabemos que não é possível encontrar emparelhamento que deixa menos do que $c_o(G-S)-|S|$ vértices livres. Portanto, se M deixa exatamente $c_o(G-S)-|S|$ vértices livres, para algum S, então M é máximo.

Estruturas como o conjunto S, que definem condições necessárias para alguma propriedade, são chamados de **certificados**. O conjunto S, por exemplo, é um certificado de que *ao menos* certa quantidade de vértices é deixada livre por um emparelhamento em G.

Outro conceito que será útil adiante é o de *testemunha*. Dado um emparelhamento máximo M em um grafo G, o Teorema 2.8 garante a existência de um conjunto S tal que $|M| = \frac{1}{2}(|V| + |S| - c_o(G - S))$. Um tal conjunto S é dito **testemunha** de G.

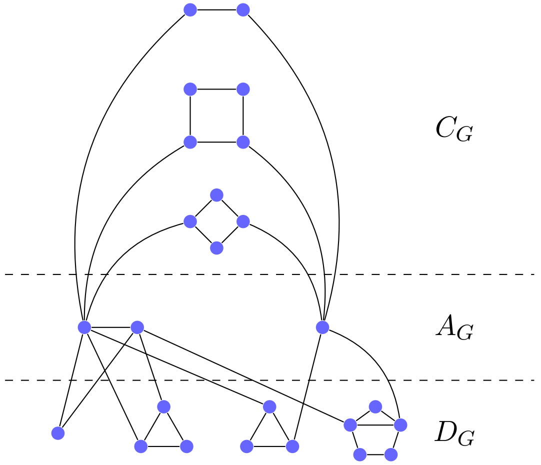

Figura 2.1: (Decomposição de Edmonds–Gallai de um grafo G. Note que $\mathrm{Def}(G) = \max\{0, c_o(D_G) - |A_G|\}$, e $\mathrm{Emp}(G) = \big(|V| + |A_G| - c_o(D_G)\big)/2$. Figura obtida de Plummer e Lovász [PL86].

Teorema 2.9 (Decomposição de Edmonds–Gallai). Dado um grafo $G = (V, E)$, sejam

$$D_G = \{v \in V : \text{existe emparelhamento máx. em } G \text{ que não cobre } v\},$$
$$A_G = \{v \in V \setminus D_G : v \text{ é adjacente a algum vértice de } D_G\},$$
$$C_G = V \setminus (D_G \cup A_G).$$

Então

a) $S = A_G$ é testemunha de G;
b) C_G é a união de componentes pares de $G - A_G$;
c) D_G é a união de componentes ímpares de $G - A_G$;
d) Todo componente ímpar de $G - A_G$ é hipoemparelhável.

2.4 UM ALGORITMO PARA ACHAR UM EMPARELHAMENTO MÁXIMO

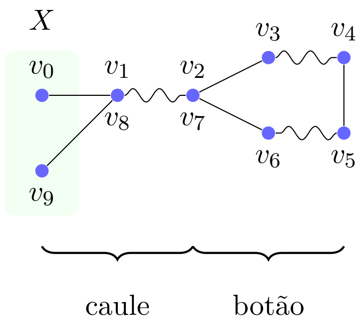

Figura 2.2: Um emparelhamento $M = \{\{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4\}, \{v_5, v_6\}\}$ e uma flor $v_0 v_1 \cdots v_7$.

O Teorema 2.1 sugere que podemos construir um emparelhamento máximo iterativamente. Partimos de um emparelhamento qualquer e enquanto houver um caminho M-aumentador P, substituímos o emparelhamento corrente M por $M \triangle P$. Descrevemos nessa seção algumas estratégias que podem ser usadas para encontrar um tal caminho.

Seja $G = (V, E)$ um grafo, M um emparelhamento em G, e X o conjunto dos vértices livres (de M). Um *passeio M-alternante* $v_0, v_1, \ldots, v_t$ é chamado de M-**flor** se satisfaz (na Figura 2.2 considere o passeio $v_0, v_1, \ldots, v_7$):

a) $v_0 \in X$;
b) $v_0, \ldots, v_{t-1}$ são distintos;
c) t é ímpar, e $v_t = v_i$ para algum i par, $i < t$.

Seja $T = v_0 v_1 \cdots v_k$ um passeio M-alternante em G entre vértices distintos de X. Se T é um caminho, então T é um caminho M-aumentador. Caso contrário, seja j o menor inteiro tal que $v_i = v_j$, para $i < j$. É fácil ver que $v_0 v_1 \cdots v_j$ é uma M-flor. A parte da M-flor de v_0 a v_i é chamada **caule** (“**stem**”) e a parte de v_i a v_t é chamada de **botão** (“**blossom**”) ou **M-botão**. Dizemos que v_0 é a **raiz** da flor ou do botão. Se B é um M-botão, definimos o grafo G/B (chamado G **contraído** de B), com emparelhamento M/B, como o grafo que resulta da substituição do botão B por um vértice. Mais formalmente, temos

- $V(G/B) = (V \setminus B) \cup \{b\}$, onde $b \notin V$ é um vértice novo;
- $E(G/B) = (E \backslash \{e \in E : e \text{ incide em } B\}) \cup \{vb : v \in V(G/B), vz \in E(G), z \in B\}$;
- $M/B = (M \setminus \{e \in E : e \text{ incide em } B\}) \cup \{vb : v \in V(G/B), vz \in M, z \in B\}$.

Note que $\{vb : v \in V(G/B), vz \in M, z \in B\}$ possui apenas uma aresta.

O Teorema 2.1 diz que se não houver caminho M-aumentador, então M é um emparelhamento máximo, e todo passeio M-alternante entre vértices distintos de X possui uma flor. A utilidade da operação de **contração**, definida acima, fica aparente pelo enunciado do teorema a seguir.

Teorema 2.10 (Edmonds, 1965). Seja $G = (V, E)$ um grafo, M um emparelhamento em G e B um M-botão. Então M é um emparelhamento máximo em G se e somente se M/B é um emparelhamento máximo em G/B.

Demonstração. Vamos provar que existe um caminho M-aumentador em G se e somente se existe um caminho M/B-aumentador em G/B.

Seja F a flor de botão B. Para todo vértice v de B, denote por P_v o caminho de comprimento par em F que vai de v até a raiz de B.

Note que se existe um caminho M-aumentador P em G que não possui aresta de B, então P também é um caminho aumentador em G/B.

Por outro lado, se existe um caminho M-aumentador P em G contendo arestas de B, então existe um caminho M-aumentador com extremo na raiz de B. De fato, tome u um extremo de P diferente da raiz de B e v o primeiro vértice do botão em P quando seguimos P partindo de u. Seja Q o subcaminho de P de u até v. O caminho procurado é dado pela união de Q com P_v.

Observe que a aresta de v em Q não é aresta de M e, portanto, $(Q \cup P)/B$ é um caminho M/B-aumentador em G/B.

Suponha então que exista um caminho M/B-aumentador P em G/B. Se P não contém b então P é um caminho M-aumentador em G. Se P contém b então seja u um extremo de P diferente da raiz de B e $v \in V(G)$ o primeiro vértice do botão em P. Como antes, tome Q o caminho em P de u a v e então $Q \cup P_v$ é um caminho M-aumentador em G. □

(Prova alternativa de uma das implicações.) Suponhamos que M/B não seja um emparelhamento máximo em G/B. Seja N um emparelhamento máximo em G/B, temos $|N| > |M/B|$.

Considere o emparelhamento $N^+ = \tilde{N} \cup \tilde{M}$, onde $\tilde{N}$ é um emparelhamento em G que não possui arestas de B e tal que $N/B = \tilde{N}$ e $\tilde{M}$ é um emparelhamento quase-perfeito em B compatível com $\tilde{N}$, isto é, existe exatamente um vértice em B livre de $\tilde{M}$ e N^+ é um emparelhamento em G. Temos

$$|N^+| = |N| + |\tilde{M}| > |M/B| + |\tilde{M}| = |M|.$$

Portanto $|N^+| > |M|$, uma contradição. □

Observação 2.11 Note que nem todo circuito ímpar hipoemparelhado é um botão. Além disso, se C é um circuito ímpar, e M/C é um emparelhamento máximo em G/C, então *não* necessariamente M emparelhamento máximo em G; onde a contração é definida analogamente.

O Teorema 2.10 motiva o seguinte algoritmo para encontrar um emparelhamento máximo partindo de um grafo G com emparelhamento M. Buscamos passeios M-alternantes entre vértices distintos de X(conjunto dos vértices livres). Se não existe tal passeio, o emparelhamento é máximo, pelo Teorema 2.1. Se encontramos um tal passeio P *sem* flor, aplicamos o algoritmo a G com emparelhamento $M' = M \triangle P$. Se encontramos um passeio *com* uma flor de botão B, aplicamos o algoritmo a G/B com emparelhamento $M' = M/B$.

O procedimento acima atinge um grafo G com emparelhamento máximo. Uma vez que G pode conter vértices resultantes de contrações, podemos usar o Teorema 2.10 para desfazê-las preservando a maximalidade do emparelhamento. Na próxima seção descrevemos o algoritmo que esboçamos.

2.5 ALGORITMO DE EDMONDS–GALLAI

Dado um emparelhamento M em G, desejamos encontrar um emparelhameno maior do que M, ou constatar que M é máximo. No processo, rotulamos os vértices do grafo, de modo a obter a decomposição de Edmonds–Gallai.

Para encontrar o emparelhamento, fazemos uso de caminhos alternantes. A grosso modo, partimos de um emparelhamento M, e construímos uma floresta M-alternante, a partir de algum vértice não coberto (raiz). A árvore "cresce" por meio da adição de arestas do emparelhamento. Nesse processo, rotulamos os vértices da árvore. Quando não pudermos prosseguir, o algoritmo termina, e as classes de vértices definidas pelos rótulos (ou sua ausência) definem as componentes da *decomposição de Edmonds–Gallai* 2.9.

Existem outros algoritmos para encontrar emparelhamentos máximos.[2]

Nosso objetivo é construir uma floresta M-alternante F, e rotulamos seus vértices PAR ou ÍMPAR. Seja X o conjunto de vértices não cobertos por M. Inicialmente rotulamos de PAR os vértices de X. Cada vértice de X é raiz de uma das árvores de F. O crescimento de F é sempre feito a partir de um vértice PAR, digamos u. Temos os seguintes casos.

Caso 1. Existe uma aresta uv onde v não está rotulado. Rotulamos v de ÍMPAR e o seu companheiro w ($vw \in M$) de PAR.

Caso 2. Existe uma aresta uv com v rotulado PAR tal que v pertence a uma árvore distinta da que u pertence. Neste caso, encontramos um caminho M-aumentador $R = P(uv)Q$, onde P é o caminho em F de r_u, raiz da árvore que contém u, até u, e Q é o caminho em F de v até r_v, raiz da árvore que contém v. Fazemos $M = M \triangle R$ e repetimos o processo da construção de F (do início!).

Caso 3. Existe uma aresta uv com v rotulado PAR e v pertencente à mesma árvore à qual pertence u. Neste caso, temos uma uma M-flor em G, com um M-botão, digamos B (circuito ímpar que existe em $F + uv$). Rotulamos de PAR os vértices do botão B, contraímos B e consideramos o grafo G/B com o emparelhamento M/B nesse grafo. Continuamos o processo de expansão da floresta F resultante. (Usamos então o teorema provado anteriormente.) Recursivamente, continuamos...

Fato 2.12 Se nenhum dos três casos ocorre, então afirmamos que encontramos um emparelhamento máximo M' no grafo corrente $G' = (V', E')$ que foi obtido do grafo original após zero ou mais contrações.

Demonstração. Considere a rotulação PAR/ÍMPAR feita conforme a M'-floresta foi construída. Seja $X' = \{x \in V'\colon x \text{ não é coberto por } M'\}$, e sejam

$$\begin{aligned} \text{PAR} &= \{v \in V' : \text{ rótulo de } v \text{ é PAR}\}, \\ \text{ÍMPAR} &= \{v \in V' : \text{ rótulo de } v \text{ é ÍMPAR}\}. \end{aligned}$$

Note que não há flores em G', e portanto $|X'| = |\text{PAR}| - |\text{ÍMPAR}|$. Para para todo subconjunto $S \subseteq V'$ vale $\text{Def}(G') \geq c_o(G - S) - |S|$ e em particular, tomando $S = \text{ÍMPAR}$, temos que

$$\mathrm{Def}(G') \geq c_o(G - \text{ÍMPAR}) - |\text{ÍMPAR}| = |\text{PAR}| - |\text{ÍMPAR}| = |X'|.$$

Como M' *não* cobre exatamente $|X|$ vértices, segue que M' é máximo. □

(Prova alternativa.) Sabemos, pela Fórmula de Tutte–Berge,

$$\mathrm{Emp}(G') \leq \frac{1}{2}(|V'| + |S| - c_o(G' - S))$$

para todo $S \subset V'$. Tomando $S = \text{ÍMPAR}$, temos

$$\mathrm{Emp}(G') \leq \frac{1}{2}(|V'| + |\text{ÍMPAR}| - |\text{PAR}|).$$

O algoritmo descrito constrói uma floresta, composta pelo conjunto de vértices rotulados. Como na outra demonstração, considere a rotulação PAR/ÍMPAR feita conforme a M'-floresta foi construída. Seja $X' = \{x \in V' \colon x \text{ não é coberto por } M'\}$, e sejam

$$\begin{aligned} \text{PAR} &= \{v \in V' : \text{ rótulo de } v \text{ é PAR}\}, \\ \text{ÍMPAR} &= \{v \in V' : \text{ rótulo de } v \text{ é ÍMPAR}\}. \end{aligned}$$

Pela rotulação feita pelo algoritmo, o número de arestas do emparelhamento M' que estão fora da floresta é $(|V'| - (|\text{ÍMPAR}| + |\text{PAR}|))/2$, e o das que estão na floresta é $|\text{ÍMPAR}|$. De fato, o conjunto de vértices $X' \subseteq V'$ expostos por M' está na floresta, e assim os vértices não rotulados (isto é, fora da floresta) devem estar cobertos pelo emparelhamento M'.

A quantidade de vértices fora da floresta é $|V'| - (|\text{ÍMPAR}| + |\text{PAR}|)$, e o número de arestas do emparelhamento M' na floresta é igual ao número de vértices rotulados ÍMPAR, pois cada ÍMPAR é ponta de exatamente uma aresta de M'. Portanto

$$\begin{aligned} |M'| &= \frac{1}{2}(|V'| - (|\text{ÍMPAR}| + |\text{PAR}|)) + |\text{ÍMPAR}| \\ &= \frac{1}{2}(|V'| + |\text{ÍMPAR}| - |\text{PAR}|). \end{aligned}$$

Logo, o emparelhamento M' é máximo. □

Já vimos que o emparelhamento máximo em G' corresponde a um emparelhamento máximo no grafo G inicial, obtido segundo o Teorema 2.10 (os botões são descontraídos na ordem inversa de sua contração).

Observamos agora como identificar a decomposição de Edmonds-Gallai do Teorema 2.9 partindo da rotulação de G fornecida pelo algoritmo. Lembramos que D_G é o conjunto dos vértices que são descobertos por algum emparelhamento máximo, e A_G é o conjunto de vizinhos de D_G em $V \setminus D_G$. Note que PAR é o conjunto dos vértices v tais que existe em G um caminho M-alternante de comprimento par de X até v. Analogamente, ÍMPAR é o conjunto de vértices $v \in V(G) \setminus \text{PAR}$ alcançáveis por um caminho M-alternante de comprimento ímpar.

Proposição 2.13 Seja M um emparelhamento máximo em $G = (V, E)$, X o conjunto dos vértices não cobertos por M e sejam PAR e ÍMPAR como acima. Então $\text{PAR} = D_G$ e $\text{ÍMPAR} = A_G$.

Consideramos que um caminho de comprimento zero é um caminho M-alternante. Ou seja, PAR contém o conjunto X.

Demonstração. Demonstraremos a igualdade $\text{PAR} = D_G$; o fato $\text{ÍMPAR} = A_G$ é um exercício.

(Prova de $\text{PAR} \subseteq D_G$.*)* Seja v um vértice em PAR, e seja P um caminho M-alternante de X para v. Considere $M' = M \triangle P$. Então M' é um emparelhamento máximo que não cobre v. Portanto, v pertence a D_G.

(Prova de $D_G \subseteq$ PAR.) Seja v um vértice em D_G. Se v pertence a X então v pertence a PAR. Suponha que v é coberto por M. Seja M' um emparelhamento máximo que não cobre v (M' existe pois v pertence a D_G). Os componentes de $M' \triangle M$ são circuitos ou caminhos pares com arestas alternadamente em M' e em M. Como v é coberto por M, existe um caminho alternante par que começa em v, com uma aresta de M, e termina num vértice w, chegando por uma aresta de M'. Como w não é coberto por M, então w pertence a X. Neste caso, temos um caminho M-alternante par que começa em Xe termina em v. Logo, v pertence a PAR. □

Um corolário que segue imediatamente do Algoritmo de Edmonds–Gallai é o seguinte.

Corolário 2.14 Se M é um emparelhamento máximo em um grafo G, então para todo vértice w em D_G, existe um vértice v não-coberto por M e um caminho M-alternante par de v a w.

2.6 EXERCÍCIOS

Exercício 2.4. Seja k um inteiro positivo, e seja G um grafo simples com $|V(G)| \geq 2k$, e tal que $d(v) \geq k$ para todo $v \in G$. Mostre que G tem um emparelhamento com pelo menos k arestas.

Exercício 2.5. Prove que todo grafo bipartido com pelo menos uma aresta tem um emparelhamento que cobre todos os vértices de grau máximo.

Observação 2.15 Note que uma consequência imediata desse resultado é o fato de que o conjunto das arestas e um grafo bipartido pode ser particionado em $\Delta(G)$ emparelhamentos. (Ou seja, o índice cromático de um grafo bipartido é precisamente $\Delta(G)$).

Exercício 2.6. Seja E um emparelhamento maximal e $E^\star$ um emparelhamento máximo num grafo. Mostre que $|E| \geq |E^\star|/2$.

Exercício 2.7. Prove o Teorema de Hall usando o Teorema de Tutte (Teorema 2.5).

Exercício 2.8. Prove que se $G = (V, E)$ é um grafo com $|V|$ par e tal que

$$|\operatorname{Adj}(X)| \geq \min\left\{|V|, \frac{4}{3}|X| - \frac{2}{3}\right\} \quad \text{para todo } X \subseteq V,$$

então G tem um emparelhamento perfeito.

NOTAS DO CAPÍTULO 2

1. O conceito de emparelhamento pode ser generalizado com o conceito de fatores. Um k-**fator** de G é um subgrafo gerador $H \subseteq G$ em que todo vértice possui grau k. Assim, um emparelhamento perfeito é um 1-fator.

Fatores são comuns no estudo de grafos regulares. Por exemplo, todo grafo bipartido regular (com ao menos uma aresta) possui um 1-fator, e todo grafo euleriano regular possui um 2-fator.

2. No livro de Plummer e Lovász [PL86] é descrito um algoritmo, que usa decomposição em orelhas, de complexidade $O(n^3)$ para encontrar um emparelhamento máximo num grafo arbitrário com n vértices. Existem vários outros algoritmos para esse problema: de complexidade $O(\sqrt{n}m)$, de Micali e Vazirani (1980), de complexidade $O(n^{2.5})$, de Even e Kariv (1975), de complexidade $O(mn)$, de Gabow e Tarjan (1983), onde m é o número de arestas do grafo. Mencionaremos (em aula) o algoritmo de Pape e Conradt (1980) que propõe uma maneira simples de lidar com os botões (fazendo cópias de vértices, de modo a evitar contrações).

2.7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[BM08] A. Bondy and U.S.R. Murty. *Graph Theory*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2008.

[CCPS11] W.J. Cook, W.H. Cunningham, W.R. Pulleyblank, and A. Schrijver. *Combinatorial Optimization*. Wiley Series in Discrete Mathematics and Optimization. Wiley, 2011.

[Die05] Reinhard Diestel. *Graph Theory (Graduate Texts in Mathematics)*. Springer, August 2005.

[Ore55] Oystein Ore. Graphs and matching theorems. *Duke Math. J.*, 22:625–639, 1955.

[PL86] D. Plummer and L. Lovász. *Matching Theory*. North-Holland Mathematics Studies. Elsevier Science, 1986.