Um Estudo Poliédrico do Problema de Steiner com Grupos

Fernando Mario de Oliveira Filho
Orientador: Carlos Eduardo Ferreira

20 de abril de 2004

1 Introdução

Um problema de otimização combinatória pode ser descrito da seguinte forma: *dada uma função f com valores reais definida sobre um conjunto finito, encontrar um elemento deste conjunto que maximiza (minimiza) esta função.* Dependendo da forma como a função f é dada o problema pode ou não ser simples de resolver do ponto de vista computacional. Por exemplo, se f for dada explicitamente através de uma lista dos elementos de seu domínio e valores associados, uma simples busca resolve o problema em tempo polinomial. Se, ao invés disso, fornecermos um grafo e especificarmos que o domínio de f é o conjunto dos (r, s)-caminhos neste grafo então uma simples busca já toma tempo exponencial no tamanho do grafo que é a nossa entrada.

Muitos problemas de otimização combinatória importantes podem ser resolvidos em tempo polinomial [4, 20, 26]. Outros, entretanto, continuam a desafiar os pesquisadores da área, como é o caso do famoso problema do caixeiro viajante. Na verdade, sabemos que tal problema é NP-difícil [7], sendo portanto improvável que existam algoritmos polinomiais para resolvê-lo.

Outro problema de otimização combinatória NP-difícil é o problema de Steiner em grafos [14]. Provavelmente um dos problemas de otimização combinatória mais estudados, o problema de Steiner em grafos surge naturalmente em aplicações práticas, como o desenvolvimento de circuitos VLSI e biologia computacional. Para exibirmos o problema vamos introduzir uma definição. Dados um grafo G e um subconjunto não-vazio Z de V_G, dizemos que um subconjunto S de E_G é Z**-gerador** se Z está contido num dos componentes de $G[S]$. Com isso, o problema de Steiner com grafos pode ser definido da seguinte forma:

> **Problema** PSG (G, Z, c): Dados um grafo G, um subconjunto Z de V_G e um custo c_e em $\mathbb{Q}$ para cada e em E_G, encontrar um subgrafo T de G que seja induzido por um conjunto Z-gerador e que minimize $c(T) := c(E_T)$.

Chamamos os vértices de Z de **terminais** e os demais vértices de **não-terminais** ou **vértices de Steiner**. O problema de Steiner em grafos, como já dissemos, é NP-difícil [19].

Durante o desenvolvimento de circuitos VLSI, quando já decidimos onde cada componente foi colocado na placa do circuito, podemos utilizar o PSG para modelar o problema do roteamento. Temos então um grafo associado à placa e para cada componente temos um pino conector. O conjunto dos conectores seria o conjunto de terminais, que queremos conectar através de uma rede condutora de custo mínimo. Observe que podemos usar muitos outros vértices do grafo para nos ajudar. A Figura 1 ilustra esta idéia.

O problema de Steiner com grupos generaliza o problema de Steiner em grafos. Ele foi proposto por Reich e Widmayer [22] para levar em conta outro aspecto do problema do roteamento. Quando dispomos os componentes no circuito, podemos ainda rotacioná-los, de modo que a posição do pino

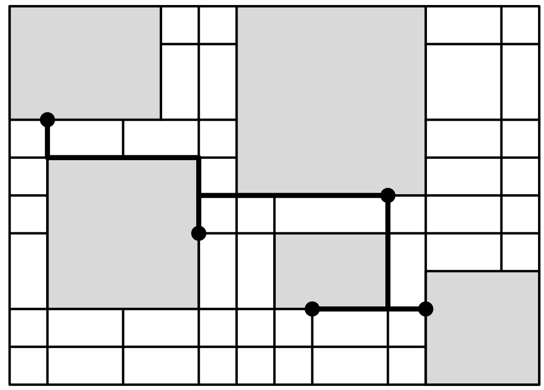

Figura 1: Um grafo associado a um problema de roteamento. Os componentes do circuito são os blocos em cinza, as arestas as linhas verticais e horizontais e os terminais os pontos pretos. Os cruzamentos entre os segmentos verticais e horizontais determinam vértices do grafo e o custo de uma aresta é seu comprimento. Uma possível solução ótima está destacada.

conector pode mudar, como mostra a Figura 2. Gostaríamos então de obter, levando-se em conta todas as possíveis rotações dos componentes, a melhor solução para o problema do roteamento.

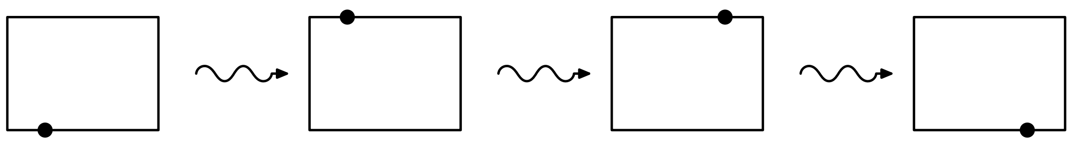

Figura 2: As possíveis rotações de um componente e a posição final do conector após cada uma delas.

Uma das formas de modelar este problema é usando o problema de Steiner com grupos, como já mencionamos. Para apresentar este problema, vamos primeiro introduzir uma definição. Dados um grafo G e uma coleção $\mathcal{R}$ de subconjuntos de V_G, dizemos que um subconjunto S de E_G é **$\mathcal{R}$-gerador** se um dos componentes de $G[S]$ contém pelo menos um vértice de cada conjunto de $\mathcal{R}$. Com isso, podemos apresentar o problema de Steiner com grupos:

Problema PSGRP $(G, \mathcal{R}, c)$: Dados um grafo G, uma coleção $\mathcal{R}$ de subconjuntos V_G e um custo c_e em $\mathbb{Q}$ para cada e em E_G, encontrar um subgrafo T de G que seja $\mathcal{R}$-gerador e que minimize $c(T)$.

Sendo uma generalização do PSG, o PSGRP também é NP-difícil. Na verdade, vamos discutir mais sobre a complexidade do PSGRP nas seções seguintes. Chamamos os conjuntos de $\mathcal{R}$ de **grupos**. Um vértice que pertence a algum grupo é um **vértice de grupo**, os demais vértices são **não-terminais** ou **vértices de Steiner**.

Utilizar o problema de Steiner com grupos para modelar o problema do roteamento, levando-se em conta as rotações e espelhamentos dos componentes, é simples: basta considerar para cada componente um conjunto de vértices composto pelos possíveis pinos conectores daquele componente, levando-se em conta as rotações e espelhamentos. A Figura 3 mostra a instância do PSGRP associada ao circuito da Figura 1.

Como muitos problemas de otimização NP-difíceis, o PSGRP é de grande relevância. Para atacá-lo, entretanto, precisamos de estratégias especiais, já que é improvável a existência de um algoritmo

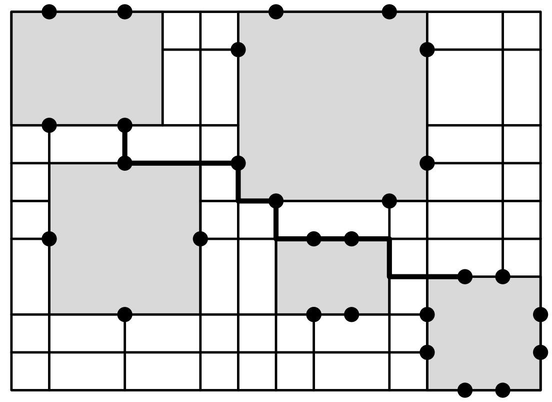

Figura 3: Para cada um dos componentes, que são representados por blocos cinzas, consideramos agora um conjunto de possíveis conectores, levando em conta possíveis rotações e espelhamentos do componente. Observe que a solução ótima encontrada é superior àquela da Figura 1.

polinomial para resolvê-lo. Por exemplo, se não estamos interessados em encontrar soluções ótimas mas nos contentamos em encontrar soluções próximas do ótimo, podemos utilizar algoritmos de aproximação para resolver o problema. Uma α**-aproximação polinomial** para um problema de minimização (como o PSGRP) é um algoritmo polinomial que devolve uma solução viável do problema em questão cujo custo não ultrapassa α vezes o custo de uma solução ótima. Um algoritmo de aproximação é de especial interesse para um problema difícil pois nos fornece não só uma solução viável como também nos dá uma garantia de qualidade desta solução. Vamos falar mais sobre algoritmos de aproximação para o PSGRP na seção 2.2.

Outra abordagem possível para atacar problemas difíceis como o PSGRP é desenvolver algoritmos exatos. Estes algoritmos podem ser afinados de modo a se tornarem extremamente eficientes no trato de instâncias advindas de situações práticas, já que tais instâncias geralmente têm estruturas bem particulares, que podemos aproveitar. Um algoritmo exato certamente encontra soluções ótimas mas pode consumir uma grande quantidade de tempo para isso. Falaremos mais sobre algoritmos exatos para o PSGRP na seção 2.3

Nas próximas seções, vamos discutir alguns aspectos do PSGRP, incluindo sua complexidade e outros resultados negativos, algoritmos de aproximação que foram desenvolvidos, técnicas de redução existentes e o que se sabe do problema do ponto de vista poliédrico. Terminaremos por apresentar uma proposta de estudos baseada no estudo do problema.

2 Resultados conhecidos: um breve resumo

2.1 Complexidade computacional

Como mencionamos na seção anterior, o PSGRP é NP-difícil já que é uma generalização do PSG. Ao contrário do PSG, o PSGRP continua NP-difícil mesmo em instâncias bem específicas, nas quais o PSG pode ser resolvido em tempo polinomial. Apresentaremos agora um resultado central neste sentido, relacionando o PSGRP com o problema da cobertura mínima por conjuntos.

O problema da cobertura mínima por conjuntos é um problema de extrema importância em otimização combinatória. Para apresentar este problema, vamos primeiro introduzir uma definição. Dado um conjunto finito E e uma coleção $\mathcal{S}$ de subconjuntos de E, dizemos que $\mathcal{S}$ **cobre** E se todo elemento de E pertence a algum conjunto de $\mathcal{S}$. O problema da cobertura mínima por conjuntos é o seguinte:

Problema MinCC $(E, \mathcal{S}, c)$: Dado um conjunto finito E, uma coleção $\mathcal{S}$ de subconjuntos de E e um custo c_S em $\mathbb{Q}$ para todo S em $\mathcal{S}$, encontrar uma subcoleção $\mathcal{T}$ de $\mathcal{S}$ que cobre E e que minimize $c(\mathcal{T})$.

Sabemos que o MinCC é NP-difícil [7]. Além disso, há fortes resultados de inaproximabilidade a respeito dele [5, 21]: a não ser que P = NP, não existe uma $(\epsilon \ln |E|)$-aproximação polinomial para o MinCC $(E, \mathcal{S}, c)$, para algum $\epsilon > 0$.

O que vamos apresentar agora é uma maneira de reduzir, em tempo polinomial, uma instância do PSGrp a uma instância do MinCC preservando os custos das soluções. A redução é bem simples. Dada uma instância $(E, \mathcal{S}, c)$ do MinCC, considere a instância $(G, \mathcal{R}, c')$ do PSGrp onde:

- O grafo G contém um vértice v_S para cada S em $\mathcal{S}$ mais um vértice u, ligado a todos os demais (i.e., G é uma estrela de centro u);
- $c'_{uv_S} = c_S$ para cada S em $\mathcal{S}$ e
- Para cada $a \in E$ temos um grupo R_a em $\mathcal{R}$, onde $R_a := \{v_S \colon a \in S \in \mathcal{S}\}$.

É fácil ver que uma solução ótima do MinCC $(E, \mathcal{S}, c)$ corresponde a uma solução ótima de mesmo custo do PSGrp $(G, \mathcal{R}, c')$ e vice-versa. Observe que o grafo G é uma estrela, donde podemos concluir que o PSGrp é NP-difícil mesmo que G seja uma estrela. Se exigirmos grupos dois a dois disjuntos (algo que geralmente é conveniente) podemos alterar ligeiramente o grafo G e a coleção $\mathcal{R}$ de forma a obter uma instância equivalente na qual os grupos são dois a dois disjuntos [8, 16]. Esta redução pode introduzir arestas de custo zero, mas o grafo continua sendo uma árvore. Logo, o PSGrp é NP-difícil em árvores mesmo que os grupos sejam dois a dois disjuntos.

Como a redução apresentada preserva custos, podemos concluir que, a não ser que P = NP, não existe uma $(\epsilon \ln |\mathcal{R}|)$-aproximação polinomial para o PSGrp $(G, \mathcal{R}, c)$ para algum $\epsilon > 0$. Ainda há outros resultados de complexidade envolvendo o PSGrp. Ihler [16] estudou o problema e obteve diversas reduções relevantes do ponto de vista de desenvolvimento de circuitos VLSI por envolverem grafos com grau máximo pequeno. Ele foi o primeiro a propor a redução do PSGrp ao MinCC. Ihler também estudou algumas variantes do problema [17] que também se mostraram difíceis e obteve sucesso em encontrar algoritmos polinomiais apenas para instâncias com estruturas bem particulares. Ihler, Reich e Widmayer [18] provaram que o PSGrp é NP-difícil mesmo que o grafo em questão seja um subgrafo de uma grade quadrada no plano e que cada grupo contenha no máximo três vértices.

2.2 Algoritmos de aproximação

Vários algoritmos de aproximação foram propostos para o PSGrp. Reich e Widmayer [22], quando propuseram o problema, propuseram também duas heurísticas para encontrar soluções viáveis. Mais tarde, Ihler [15] observou que ambas as heurísticas apresentadas não ofereciam garantias de qualidade. Ele modificou levemente uma das heurísticas, obtendo uma $(|\mathcal{R}| - 1)$-aproximação polinomial para o problema.

Mais tarde, outros algoritmos de aproximação foram propostos para o problema. Helvig, Robins e Zelikovsky [13] propuseram uma $O(|\mathcal{R}|^\epsilon)$-aproximação polinomial para todo $\epsilon > 0$ fixo. Garg, Konjevod e Ravi [8] propuseram uma $O(\log^2 n \log\log n \log |\mathcal{R}|)$-aproximação probabilística polinomial, onde $n := |V_G|$. Este algoritmo fornece em tempo polinomial e com probabilidade $1 - \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$ uma solução viável do problema cujo valor não ultrapassa $O(\log^2 n \log\log n \log |\mathcal{R}|)$ vezes o valor de uma solução ótima. No caso de grafos que não possuem $K_{s,s}$ como menor, o algoritmo destes autores possui uma razão de aproximação melhor.

Em sua tese de doutorado, Slavík [27] propõe dois algoritmos de aproximação para casos particulares do PSGRP. O primeiro trata do caso em que o grafo é uma árvore e temos algumas restrições adicionais sobre a disposição dos vértices de grupo, a razão de aproximação do algoritmo neste caso é $\Theta(\log|\mathcal{R}|)$. O outro caso trata de grafos quaisquer em que os grupos tem cardinalidade no máximo ρ. O algoritmo fornecido para estes grafos tem razão de aproximação 2ρ. Este algoritmo é particularmente interessante do ponto de vista prático, em que os grupos são certamente pequenos.

2.3 Algoritmos exatos

Nenhum algoritmo exato foi proposto para o PSGRP em grafos gerais. Rohe e Zachariasen [23] desenvolveram um algoritmo exato para a versão retilinear do problema (análoga à versão retilinear do problema de Steiner, veja [14]). Várias das técnicas de redução de instâncias apresentadas para o PSG podem ser adaptadas para o PSGRP. Em [23], algumas técnicas de redução são adaptdas com sucesso ao PSGRP.

Salazar [24] adaptou resultados poliédricos disponíveis para o PSG [1, 2, 3, 6, 9, 10, 11, 12] ao PSGRP. Neste trabalho o autor apresenta algumas possíveis formulações do problema e classes de facetas e inequações válidas para estas formulações. Tais resultados podem ser usados em algoritmos *branch-and-cut* para o problema.

Yang e Gillard [28] propuseram uma formulação inteira do problema e, através do método de relaxação lagrangeana e otimização subgradiente obtiveram limitantes inferiores para o ótimo. Eles também propõe neste mesmo trabalho um algoritmo para construir classes de instâncias do PSGRP para as quais são conhecidos os valores ótimos.

3 Plano de Estudos

Nosso plano de estudos consiste em cobrir principalmente os resultados poliédricos envolvendo o PSGRP. Vamos começar pelo estudo dos resultados disponíveis para o PSG e estudar a relação destes resultados com o PSGRP.

Pretendemos também estudar a literatura geral sobre combinatória poliédrica e programação inteira [25], para que sirva de base para os estudos específicos sobre o problema de Steiner com grupos.

Ao final dos estudos, será elaborada uma monografia sobre os tópicos estudados.

Referências

[1] M. D. Biha, H. Kerivin, and A. R. Mahjoub. Steiner trees and polyhedra. *Discrete Applied Mathematics*, 112:101–120, 2001.

[2] S. Chopra and M. R. Rao. The Steiner tree problem i: Formulations, compositions and extension of facets. *Mathematical Programming*, 64:209–229, 1994.

[3] S. Chopra and M. R. Rao. The Steiner tree problem ii: Properties and classes of facets. *Mathematical Programming*, 64:231–246, 1994.

[4] W. J. Cook, W. H. Cunningham, W. R. Pulleyblank, and A. Schrijver. *Combinatorial Optimization*. Wiley Interscience, 1998.

[5] U. Feige. A threshold of $\ln n$ for approximating set cover. *Journal of the ACM*, 45:634–652, 1998.

[6] M. Fischetti. Facets of two Steiner arborescence polyhedra. *Mathematical Programming*, 51(3, (Ser. A)):401–419, 1991.

[7] M. R. Garey and D. S. Johnson. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1979.

[8] N. Garg, G. Konjevod, and R. Ravi. A polylogarithmic approximation algorithm for the group Steiner tree problem. *Journal of Algorithms*, 37(1):66–84, 2000.

[9] M. X. Goemans. The Steiner tree polytope and related polyhedra. *Mathematical Programming*, 63:157–182, 1994.

[10] M. X. Goemans and Y. S. Myung. A catalog of Steiner tree formulations. *Networks*, 23:19–28, 1993.

[11] M. Grötschel and C. L. Monma. Integer polyhedra associated with certain network design problems with connectivity constraints. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 3:502–523, 1990.

[12] M. Grötschel, C. L. Monma, and M. Stoer. Facets for polyhedra arising in the design of communication networks with low connectivity constraints. *SIAM Journal on Optimization*, 2:125–128, 1992.

[13] C. H. Helving, R. Robins, and A. Zelikovsky. An improved approximation scheme for the group Steiner tree problem. *Networks*, 37(1):8–20, 2001.

[14] F. K. Hwang, D. S. Richards, and P. Winter. *The Steiner Tree Problem*, volume 53 of *Annals of Discrete Mathematics*. North-Holland, 1992.

[15] E. Ihler. Bounds on the quality of approximate solutions to the group Steiner problem. In *Graph-Theoretic Concepts in Computer Science WG90*, volume 484 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 109–118. Springer, 1991.

[16] E. Ihler. The complexity of approximating the class Steiner tree problem. In *Graph-Theoretic Concepts in Computer Science WG91*, volume 570 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 85–96. Springer, 1992.

[17] E. Ihler. The rectilinear class Steiner tree problem for intervals on two parallel lines. *Mathematical Programming*, 63(3):281–296, 1994.

[18] E. Ihler, G. Reich, and P. Widmayer. Class Steiner trees and VLSI design. *Discrete Applied Mathematics*, 90:173–194, 1999.

[19] R. M. Karp. Reducibility among combinatorial problems. In Miller and Thatcher, editors, *Complexity of Computer Computations*, pages 85–103. Plenum Press, New York, 1972.

[20] C. H. Papadimitriou and K. Steiglitz. *Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity*. Dover, 1998.

[21] R. Raz and S. Safra. A sub-constant error-probability low-degree test, and a sub-constant error-probability PCP characterization of NP. In *Proceedings of the 28th Anual ACM Syposium on Theory of Computing*, pages 475–484, 1997.

[22] G. Reich and P. Widmayer. Beyond Steiner's problem: A VLSI oriented generalization. In *Graph-Theoretic Concepts in Computer Science WG89*, volume 411 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 196–210. Springer, 1990.

[23] A. Rohe and M. Zachariasen. Rectilinear group Steiner trees and applications in VLSI design. *Mathematical Programming*, 94(2–3):407–433, 2003.

[24] J. J. Salazar. A note on the generalized Steiner tree polytope. *Discrete Applied Mathematics*, 100:137–144, 2000.

[25] A. Schrijver. *Theory of Linear and Integer Programming.* Wiley Interscience, 1986.

[26] A. Schrijver. *Combinatorial Optimization.* Springer-Verlag, 2003.

[27] P. Slavík. *Approximation Algorithms for Set Cover and Related Problems.* Tese de doutorado, University of New York at Buffalo, 1998.

[28] B. Yang and P. Gillard. The class Steiner minimal tree problem: a lower bound and test problem generation. *Acta Informatica*, 37(3):193–211, 2000.