Algumas contribuições de von Neumann à Física Matemática

Walter F. Wreszinski

O que caracteriza as muitas contribuições de von Neumann à Física Matemática é a profundidade e extrema originalidade das suas idéias, que parecem surgir *do nada*. Cada uma delas abriu novos caminhos, e muitas conduziram a desenvolvimentos surpreendentes. Nesta palestra, quero concentrar-me em duas dessas idéias e seus desenvolvimentos subseqüentes: a teoria de perturbações, e a dos *avoided crossings*, com maior ênfase na última. Por completeza, menciono algumas das suas contribuições fundamentais, que não serão aqui abordadas: os métodos matemáticos da mecânica quântica (von Neumann, 1932) (inclusive a teoria dos operadores não limitados e grafos (*id.*, 1929) e o teorema fundamental da unicidade relativo às relações canônicas de comutação (*id.*, 1931); a teoria das álgebras de von Neumann (Dixmier, 1957) e suas aplicações à mecânica estatística (Ruelle, 1969); a teoria dos espaços produto-direto incompletos e suas aplicações, por exemplo, modelo de Dicke do MASER por Hepp & Lieb (1973) e, finalmente, os métodos da teoria ergódica e suas aplicações à mecânica clássica (Koopman–von Neumann (1932). Cada um desses tópicos seria assunto para várias palestras. Por exemplo, o teorema da unicidade é específico a número finito de graus de liberdade: no caso de sistemas de número infinito de graus de liberdade (teoria de campos) não há unicidade, e sim variedade não-enumerável de representações inequivalentes *estranhas* das relações de comutação, o que representa uma fonte de graves problemas intrínsecos dessa teoria.

O problema da *teoria de perturbações* é central em análise funcional, particurlarmente a do espectro singular: dado um operador auto-adjunto H com espectro puramente pontual, e uma perturbação compacta V, quando é que $(H + V)$ tem também espectro puramente pontual? O início desse estudo foi o trabalho de von Newmann e Weyl, e o resultado do teorema de Weyl–von Newmann (1935) não é encorajador: *qualquer*

operador auto-adjunto difere de um operador com espectro puramente pontual por um operador de norma Hilbert–Schmidt arbitrariamente pequena. Esse resultado gerou impressionante desenvolvimento: Kato e Ronsblum mostraram que perturbações da classe do traço preservam o espectro absolutamente contínuo (Kato, 1966), mas Carey & Pincus (1976) mostraram que todo operador auto-adjunto sem parte absolutamente contínua difere de um operador com espectro pontual por um operador de norma traço arbitrariamente pequena. Pior ainda, o trabalho clássico de Donoghue (1965) dá exemplos de perturbações de *posto um*

$$H(k) = H + K < .\varphi > \varphi$$

em que

a) H é puro ponto mas $H(k)$ é puro singular contínuo para $k \neq 0$ e

b) H é puro singular contínuo, mas $H(k)$ é puro ponto par $k \neq 0$.

A solução é considerar perturbações V, que não são *pequenas* em algum sentido abastrato, mas *pequenas relativamente a* H, no sentido de que elas não deslocam demasiadamente os autovetores de H. Grosseiramente, se $\{e_n\}$ é um conjunto ortonormal de autovetores do operador puro ponto H, uma condição é

$$\Sigma_2 \parallel V^{1/2} e_n \parallel < \infty$$

Esse desenvolvimento é relativamente recente (Howland, 1987) mas mostra um aspecto fundamental do desenvolvimento das idéias de von Neumann. A condição acima é muito forte se comparada com os requisitos da teoria do espalhamento, refletindo o fato de que o espectro absolutamente contínuo é mais *estável* do que o espectro puramente pontual denso. Exemplos de espectro pontual denso hoje abundam em física matemática, na teoria de sistemas desordenados e quase-periódicos. Um exemplo é o modelo de Anderson de impurezas distribuídas aleatoriamente em um cristal, sobre o qual há diversos resultados recentes. Um deles, devido a Frölich e Spencer, garante que o espectro de operadores do tipo

$$H = -\Delta + V_\omega \quad e\ m\ l^2(Z^\nu)$$

onde $(V_\omega f)(x) = \omega(x) f(x)$, e $\{\omega(x)\}_x \varepsilon z^\nu$ são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, e $(-\Delta)$ é o laplaciano de diferença e tem espectro puro ponto se a *desordem for suficientemente elevada* (Fröhlich & Spencer, 1986).

O segundo tópico que abordaremos diz respeito à teoria de *avoided crossings* devida a von Neumann e Wigner (1927). Essa teoria tornou-se extremamente atual na última década, com implicações profundas na teoria de sistemas quânticos classicamente caóticos e da fase geométrica (fase de Berry). Referência a esses desenvolvimentos recentes encontra-se em Avron *et al.* (1989) e no extraordinário apêndice do livro de Arnold (1974). A idéia-chave é, entretanto, de von Neumann.

Considere uma matriz hermitiana $H(\phi)$, dependendo de um parâmetro $\phi \epsilon E$ (o espaço de parâmetros, um subconjunto de R^n. Sejam $E_j(\phi)$ os autovalores da matriz. Os cruzamentos (*crossings*) de autovalores têm papel fundamental em diversas teorias, por exemplo, em mecânica quântica, onde o teorema adiabático requer que $E_j(\phi_2)$ seja um autovalor *isolado*. O operador de projeção correspondente é

$$P_j(\phi_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} \frac{dz}{H(\phi) - z},$$

onde γ_j é um contorno circundando o j-ésimo autovalor no espectro. $P_j(\phi)$, herda o caráter liso de $H(\phi)$ desde que γ_j fique fora do espectro; quando as lacunas no espectro se fecham, o caráter liso pode desaparecer. Seja $D(P)$ o conjunto dos pontos de E onde P não é liso, ou seja, é o conjunto de pontos de cruzamentos de níveis.

Considere o comportamento local de $E_j(\phi)$ e $P_j(\phi)$ próximo a um cruzamento de dois níveis em ϕ. Restringindo o hamiltoniano ao subespaço degenerado em ϕ fornece uma matriz hermitiana 2×2:

$$\begin{aligned} h(\phi) &= \begin{bmatrix} \langle\psi|H(\phi)|\psi\rangle & \langle\psi|H(\phi)|\varphi\rangle \\ \\ \langle\psi|H(\phi)|\psi\rangle & \langle\psi|H(\phi)|\varphi\rangle \end{bmatrix} \\ &\equiv \epsilon_0(\phi)1 + \vec{\epsilon}(\phi).\vec{\sigma} \end{aligned}$$

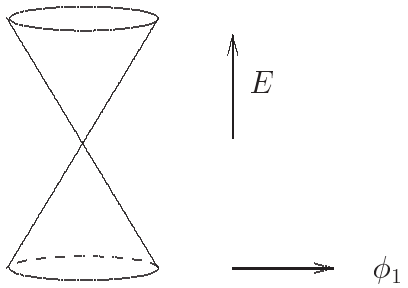
onde $/\psi >$ e $/\varphi >$ são os dois autovetores independentes de $H(\phi)$ em ϕ. Aqui, $\vec{\epsilon}(\phi)$ é uma função em R^3, e $\vec{\sigma}$ o tripleto de matrizes de Pauli. Os dois autovalores da matriz $h(\phi)$ são

$$E_{\pm}(\phi) = \epsilon_0(\phi) \pm |\vec{\epsilon}(\phi)| \tag{1}$$

onde $\vec{\epsilon}(\phi) = \vec{0}$. Assim, para matrizes hermitianas complexas $D(P)$ tem *co-dimensão 3*; para matrizes reais, a co-dimensão é 2. As autoprojeções são:

$$P_{\pm}(\phi) = [1 \pm \hat{\epsilon}(\phi) \, . \, \vec{\sigma}]/2 \tag{2}$$

onde $\hat{\epsilon}$ é o vetor unitário associado à $\vec{\epsilon}$. Devido ao valor absoluto em (1) e à normalização a vetores unitários em (2), nem $E_{\pm}(\phi)$ nem $P_{\pm}(\phi)$ são necessariamente lisos em ϕ. No espaço $\vec{\epsilon}$, (1) descreve uma cônica:



Berry chama tais pontos de *diabólicos*. Os autovalores são contínuos em $\vec{\epsilon}$ mas não-lisos, e as projeções não são nem mesmo contínuas próximas de $\vec{\epsilon} = \vec{0}$.

A idéia fundamental de von Neumann, totalmente original, é a seguinte, fornecendo uma prova alternativa do teorema. O espaço de matrizes hermitianas $n \times n$ é um espaço vetorial de n^2 dimensões. Mostremos inicialmente que o espaço de matrizes hermitianas não-degeneradas é de dimensão plena (n^2). A matriz unitária que diagonaliza uma dada matriz hermitiana com espectro não-degenerado fixo

$$E_1 < E_2 < ... \qquad < E_n \tag{3}$$

está determinada a menos de uma matriz diagonal unitária. Dessa forma, existe uma correspondência biunívoca entre matrizes hermitianas não-degeneradas *com espectro fixo* e elementos de

$$U(n)/[U(1)]^n \tag{4}$$

Como dim $[U(n)] = n^2$, o espaço em (4) é $n(n-1)$ dimensional, o que, junto com as n dimensões associadas à variação dos E_j (3), fornece n^2, a dimensão plena.

Considere, agora, as matrizes hermitianas com um estado degenerado, digamos o fundamental. A equação (3) é substituída por

$$E_1 = E_2 ..... < E_n \tag{5}$$

As unitárias diagonalizantes correspondentes são identificadas com os elementos de

$$U(n)/[[U(1)]^{n-2} \times U(2)] \tag{6}$$

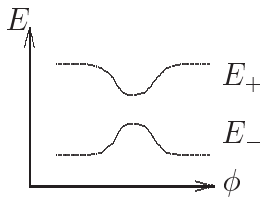
que é de dimensão $n^2-(n-2)-4 = n(n-1)-2$. A dimensão do espaço associado à variação dos E_j em (5) é $n-1$ e a dimensão total do espaço com uma degenerescência é $n(n-1)-2+n-1 = n^2-3$. A codimensão é 3 e é independente de n. De forma mais geral, o espaço das matrizes hermitianas com m-degenerescências tem codimensão

$$(m-1) + dim\ U(m) - m\ dim\ U(1) = m^2 - 1$$

As codimensões são independentes da dimensão das matrizes e valem para operadores que são limites de matrizes e tem *espectro discreto*.

O teorema de von Neumann–Wigner nesta forma tem conteúdo essencialmente geométrico, indicando que o conjunto de elipsóides de revolução é uma união finita de subvariedades diferenciáveis de codimensão ≥ 2 na variedade de todos os elipsóides de revolução. Esse é o ponto de vista de Arnold (1974). Essa idéia foi fecunda.

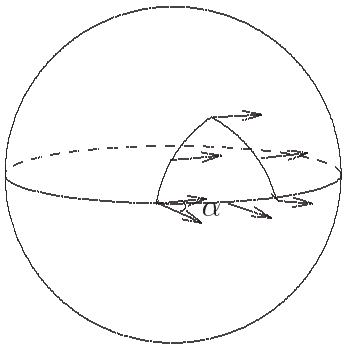
O teorema sugere que uma família de operadores dependendo de n parâmetros tem cruzamentos de níveis em um conjunto de codimensão 3 no espaço dos parâmetros. Isto é um *ansatz*, não um teorema, porque a família a n-parâmetros pode estar imersa em uma forma especial no espaço de todas as matrizes hermitianas: considere a equação de Schrödinger na reta com potencial $V(x;\phi)$ dependendo de n parâmetros $\phi \equiv (\phi_1, ..., \phi_n)$ com $V \to \infty$ para $|x| \to \infty$. O *ansatz* de von Neumann–Wigner fornece codimensão 2 neste caso, mas falha arbitrariamente mal porque o espectro é *simples* devido a uma *identidade wronskiana*.



Entretanto o *ansatz* funciona em geral extraordinariamente bem para sistemas quânticos genéricos (não classicamente integráveis), com hamiltonianas reais; variando-se apenas um parâmetro, não há cruzamentos e sim *avoided crossings*, como os da figura mencionada. Esse fato tem implicações profundas na moderna teoria de sistemas quânticos classicamente caóticos; a estatística de níveis revela que a dinâmica clássica deixa traços, correspondentes a uma *repulsão de níveis* (Berry, 1983).

Gostaríamos de mencionar ainda um importante problema intimamente ligado à filosofia de von Neumann–Wigner: o da fase geométrica ou fase de Berry.

A fase de Berry é um conceito geométrico ligado ao *transporte paralelo* em uma superfície curva. Se um vetor for deslocado paralelamente ao longo de uma curva fechada, por exemplo, sobre a superfície de uma esfera, ele formará no final com a direção inicial um ângulo característico da curvatura da superfície.



Em analogia à superfície, consideramos os estados (puros) em mecânica quântica. Esses estados são descritos por *raios* (duas funções de onda pertencem ao mesmo raio quando elas se diferenciam apenas por uma fase). As fases das funções de onda correspondem às direções dos vetores sobre a superfície. O transporte paralelo no espaço de estados da mecânica quântica é dado pela *equação adiabática* (a seguir). Quando, então, uma fase for transportada paralelamente ao longo de uma curva fechada no espaço de estados da mecânica quântica, ela pode no final ser distinta do valor inicial. A diferença entre os valores final e inicial denomina-se fase de Berry.

Para introduzir esse conceito em maior detalhe, consideremos o exemplo de um spin em mecânica quântica. Neste caso, como vimos, é importante distinguir entre a função de onda, isto é, o vetor de spin

$$\psi(\alpha,\beta) = \alpha|\uparrow> +\beta|\downarrow> \qquad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

$$|\uparrow> = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |\downarrow> = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e o *raio* correspondente. Em vez de raios pode-se freqüentemente utilizar os *projetores* nos vetores de spin, que são matrizes 2×2, e podem ser

parametrizadas por uma superfície esférica em três dimensões:

$$P(\vec{n}) = \frac{1}{2}(1 + \vec{n}\vec{\sigma}) \qquad |\vec{n}| = 1$$

onde $\vec{\sigma}$ denota o vetor das três matrizes de Pauli. Assim, os estados quânticos de um spin podem ser identificados com uma superfície esférica bidimensional. Sobre ela consideramos a curva fechada $\omega = \vec{n}(s)/0 \leq s \leq 1, \vec{n}(0) = \vec{n}(1)$ e tentamos encontrar vetores de spin normalizados tais que

$$P(\vec{n}(s)) = /\psi(s) >< \psi(s)/$$

A dificuldade aí reside na escolha da fase, já que o vetor de spin só pode ser reconstruído do projetor a menos de uma fase. O seguinte requisito torna única a escolha da fase, dado $\psi(0)$:

$$\langle \psi(s), \dot{\psi}(s) \rangle = 0 \quad 0 \leq s \leq 1$$

Esta é a *equação adiabática* (Simon, 1983; Kato, 1950) que é sempre verdadeira para ψ real e representa uma prescrição de como a fase dada para $s = 0$ deve ser *transportada paralelamente* ao longo da curva fechada. Ela tem uma característica comum com o transporte paralelo de vetores: que a variação $\delta\psi$ seja ortogonal a ψ; como apenas *um* número real – a fase – é procurado, essa condição é suficiente. Da mesma forma, como sabemos, do transporte paralelo de vetores sobre a esfera surge uma *diferença de fase* entre $\psi(1)$ e $\psi(0)$, a *fase de Berry* Γ:

$$\psi(1) = e^{2\pi i \Gamma} \psi(0)$$

Uma curva no espaço de estados da mecânica quântica pode ser gerada da seguinte forma: Consideremos por exemplo, a matriz hamiltoniana

$$H(\vec{B}) = \frac{1}{2}\vec{B} \,.\, \vec{\sigma}$$

de um spin 1/2 em um campo magnético $\vec{B}$. O estado quântico correspondente ao autovalor $|\vec{B}|/2$ é o projetor $P(\vec{n} = \vec{B}/|\vec{B}|)$. $\vec{B}$ tem o papel de um parâmetro, o espaço de parâmetros é $R^3\{0\}$ que é isomorfo à esfera (a exclusão do 0 é devida ao fato de que este é o *ponto de cruzamento dos autovalores*, e o teorema adiabático não vale para esses pontos). Assim, uma curva no espaço dos parâmetros gera uma outra no espaço de estado quântico.

A fase de Berry pode ser expressa apenas através dos estados (projetores) – as fases das funções de onda correspondentes não são necessárias,

como veremos agora. Seja $\phi(\vec{B})$ uma escolha arbitrária de autovetores normalizados de $H(\vec{B})$ com autovalor $|\vec{B}|e\vec{B}(s)/0 \leq s \leq 1$ uma curva fechada no espaço de parâmetros. Os vetores de spin $\psi(s)$ e $\phi(\vec{B}(s))$ – ambos autovetores com o mesmo autovalor diferenciam-se por construção apenas por uma fase

$$\psi(s) = e^{2\pi i\gamma(s)} \quad \phi(\vec{B}(s)).$$

Da equação adiabática segue então

$$2\pi i\dot{\gamma}(s) + \dot{\vec{B}}(s) \; . \; \vec{A}(\vec{B}(s)) = 0$$

onde

$$\vec{A}(\vec{B}) = \langle \phi(\vec{B}), \nabla_{\vec{B}}\phi(\vec{B})\rangle$$

é um tipo de potencial vetor (conexão). Por integração e aplicação do teorema de Stokes

$$\Gamma = \Upsilon(s=1) = \frac{i}{2\pi}\int_{\omega} \vec{A}d\vec{l} = \frac{i}{2\pi}\int_{F} \nabla \times \vec{A} \; . \; d\vec{\sigma}$$

onde F é uma superfície cuja fronteira é ω no espaço $R^3\{0\}$. Usando a linguagem de formas diferenciais, isto é, exprimindo $\nabla_{\vec{B}}\phi \to d\phi$.

$$\Gamma = \frac{i}{2pi}\int_{F} \langle d\phi, d\phi\rangle = \frac{i}{2pi}\int_{F} V$$

$$V \equiv \langle d\phi, d\phi\rangle = \sum_{i<j} Im\langle \frac{\partial\phi}{\partial B_i}, \frac{\partial\phi}{\partial B_j}\rangle dB_i \bigwedge dB_j$$

em termos de coordenadas locais. Tal fórmula não mostra a independência de Γ de mudanças de fase de ϕ mas, por

$$(\nabla \times \vec{A})_r = i\sum_{s,t} \epsilon_{rst} tr \; P\frac{\partial P}{\partial B_s}\frac{\partial P}{\partial B_t}$$

pode-se demonstrar independência.

A equação para V mostra que $V = 0$ se pudermos escolher $\phi(\vec{B})$ todos simultaneamente reais. Assim, o fenômeno da fase de Berry só está presente, e.g., em campos magnéticos, onde é impossível, porque o hamiltoniano não é invariante por inversão temporal. Consideremos agora o cálculo de $V(\vec{B})$. Por invariança rotacional, basta calcular V em

$\vec{B} \equiv (0.0.B)$. Seja $|m>$ o autovetor com $\frac{1}{2}\sigma_z|m>= m|m>$ $(m = \pm\frac{1}{2})$, então para $\vec{B}$ próximo a $(0,0,B)$, podemos tomar

$$\phi(\vec{B}) = \exp\left[i\left(\frac{B_x}{B}\frac{\sigma_y}{2} - \frac{B_y}{B}\frac{\sigma_x}{2}\right) + 0(B_x^2 + B_y^2)\right]|m>$$

de onde

$$d\phi = iB^{-1}\left(dB_x\frac{\sigma}{2}y - dB_y\frac{\sigma}{2}x\right)|m>$$

$$\begin{aligned} < d\phi, d\phi > &= -B^{-2}dB_x \bigwedge dB_y < m|\left[\frac{\sigma}{2}y, \frac{\sigma}{2}x\right]|m> \\ &= iB^{-2}\, m\, dB_x \bigwedge dB_y \end{aligned}$$

e voltando a $\vec{B}$ geral

$$V(\vec{B}) = im|\vec{B}|^{-2}\, A(\vec{B})$$

onde A é a $<$ forma da área na esfera de raio $|\vec{B}|$; segue que

$$\Gamma = \frac{i}{2\pi} i\, m\, |\vec{B}|^{-2}\, A\,(\vec{B}) = -\frac{M}{2\pi}\Omega$$

onde Ω é o ângulo sólido subentendido pela curva fechada que corresponde à órbita no espaço dos parâmetros. Em particular, se F for uma esfera (ou qualquer superfície da qual a origem é ponto interno, já que $dV = 0$)

$$\Gamma = -2m$$

que é um inteiro. Isto não é coincidência: se ω for uma curva anti-horária ao longo do equador na esfera F, que a divide em dois hemisférios $F_\pm$,

$$exp(2\pi i\Gamma) = exp(-\int_{F_+} V) = exp(\int_{F_-} V)$$

logo

$$\int_F V = 2\pi i \times (inteiro).$$

Esta é a bem conhecida quantização da integral da curvatura da classe de Chern do fibrado (que no caso é dado da seguinte forma: para cada $\vec{B}$ seja $X_{|\vec{B}|}$) o autoespaço de $H(\vec{B})$ correspondente ao autovalor $|\vec{B}!)$.

Finalmente, qual é a ligação com a teoria de von Neumann–Wigner?

Considere duas autofunções reais $\psi_\pm$ de um hamiltoniano, dependente de parâmetros que designaremos por $\vec{B}$, cujas energias degeneram

em um ponto do espaço dos parâmetros, digamos $\vec{B} = \vec{0}$ (sem perda de generalidade): quando tomadas ao longo de uma curva fechada γ no espaço dos parâmetros ψ_+ e ψ_- mudarão de sinal se e somente se γ envolver uma degenerescência. Esse teorema é mencionado em Arnold (1974). Ele permite distinguir na prática que realmente existe uma degenerescência em $\vec{B} = \vec{0}$ e não apenas em *quase tocar de cones*, análogo ao da figura dos *avoided crossings*. É bem sabido que as funções de onda são univalentes com respeito às suas variáveis (e.g. $\vec{x}$), mas esse teorema mostra que, surpreendentemente, elas não precisam sê-lo com respeito aos parâmetros do hamiltoniano. Para provar esse resultado, note que próximo a $\vec{B} = 0$, onde $E_\pm(\vec{0}) = 0$, o hamiltoniano pode ser representado por

$$H(\vec{B}) = \vec{\sigma} \, . \, \vec{B}$$

desde que a degenerescência seja levantada em primeira ordem, que é o caso genérico. Se a matriz é *real*, a componente σ_y é nula e ficamos com

$$H(\vec{B}) = \begin{pmatrix} B_z & B_x \\ B_x & -B_z \end{pmatrix}$$

Neste caso, os níveis de energia se interceptam cônicamente no espaço E, B_x, B_z (de fato, $E_+(\vec{B}) = -E_-(\vec{B}) = (B_x^2 + B_z^2)^{1/2}$) e a fase de Berry é novamente

$$\Gamma = -\frac{m}{2\pi}\Omega$$

onde $\Omega = 2\pi$ se γ envolve a degenerescência ($\vec{B} = \vec{0}$) no sentido anti-horário, zero de outra forma (é o *ângulo sólido* no plano $B_y = 0$). Assim,

$$\Gamma_\pm = \mp\frac{1}{2\pi} \times \frac{1}{2} 2\pi = \mp\frac{1}{2}$$

e a mudança de fase é $exp(2\pi i \Gamma_\mp) = exp(\mp i\pi) = -1$. Como exemplo explícito, considere a curva

$$\vec{B}(s) = B(cos 2\pi S, 0, sin 2\pi S); 0 \leq s \leq 1$$

A autofunção de spin correspondente ao autovalor $+|\vec{B}(s)|/2(\psi_+(s))$ bem conhecida

$$\psi_+(s) = \begin{bmatrix} sin(\pi s + \pi/4) \\ sin(\pi s - \pi/4 \end{bmatrix}$$

e safisfaz à equação adiabática. Assim,

$$\psi_+(0) = -\psi_+(1)$$

isto é, a fase de Berry é 1/2.

Para concluir: o teorema adiabático está demonstrado no trabalho clássico de Kato (1950); uma exposição simples do resultado encontra-se em Simon (1983).

Como vimos, as idéias de von Neummann no capítulo dos *crossings* geraram desenvolvimentos espantosos, com implicações profundas em geometria e em diversos campos da física matemática.

Referências bibliográficas

AVRON, J. E.; SADUN, L.; SEGERT, J. & SIMON, B. Chern numbers, quaternions and Berry phases in Fermi systems. *Coomm. math. Phys.*, v. 124, n. 595, 1989.

ARNOLD, V. Methods mathematiques de la mécanique classique. Mir, 1974 [apêndice 10].

BERRY, M. V. Chaotic behaviour of deterministic systems. *Les Houches XXXVI*, North Holland, 1983.

CAREY, R. W. & PINCUS, J. D. *Amer. J. Math.*, v. 98, n. 481, 1976.

DIXMIER, J. *Les algèbres d'operateurs dans l'espace hilbertien. Algèbres de von Neumann*, 1957.

DONOGHUE, W. *Comm. Pure Appl. Math.*, v. 18, n. 559, 1965.

FRÖHLICH, J. & SPENCER, T. *Comm. Math. Phys.*, v. 88, n. 151, 1983.

HEPP, K. & LIEB, E.H. *Ann. Phys.*, v. 76, n. 360, 1973.

HOWLAND, J. S. *J. Funct. Anal.*, v. 74, n. 52, 1987.

KATO, T. Perturbation theory for linear operators. Springer, 1966.

———. *J. Phys. Soc. Japan*, v. 5, n. 435, 1950.

RUELLE, D. Statistical mechanics. Gouthier, Villars Benjamin, 1969.

SIMON, B. *Phys. Rev. Lett.*, v. 51, n. 2167, 1983.

SIMON, B. & WOLFF, T. *Comm. Pure Appl. Math*, v. 39, n. 75, 1986.

VON NEUMANN, J. *Mathematische Grundlagen der quantenmechnik*. N.Y., Springer, 1932.

———. Allgemeine Eigenwerttheorie Hwemitescher Funktionalopeeratoren. *Math. Ann.*, v. 102, n. 49, 1929.

———. Über adjungierte Funktionaloperatoren. *Math. Ann.*, v. 2, n. 33, p. 294, 1929.

———. Die Eindeutigkeit der Schrödingerschen Operatores. *Math. Ann.*, v. 104, n. 570, 1931.

———. Charakterisierung des Spektrums eines Integraloperators. *Actualites Sci. et Ind.*, v. 229, n. 38, 1935.

VON NEUMANN, J. & KOOOPMAN, B. O. Dynamical systems of continuous spectra. *Proc. Nat. Acad. Sci.*, v. 18, n. 255, 1932.

VON NEUMANN, J. & WIGNER, E. P. *Phys. Zeit.*, v. 30, n. 467, 1927.

Walter Wreszinski é professor do Departamento de Física Matemática do Instituto de Física da USP.

Palestra feita pelo autor no encontro *A obra e o legado de John von Neumann*, organizado pelo Instituto de Estudos Avançados da USP e pela Academia Brasileira de Ciências no Instituto de Matemática e Estatística da USP em 14 de novembro de 1995.