PROVA SUBSTITUTIVA

MAT0122 ÁLGEBRA LINEAR I (BCC)

2^{O} SEMESTRE DE 2025

Nome completo: ____________________

NUSP: ____________________

Instruções:

(*1*) Esta prova é individual.
(*2*) A prova consiste de **4** questões (contando a Questão 0 nesta página). Note que é possível tirar mais de 10 nesta prova `:-)`
(*3*) Para ter nota integral em uma questão, a escrita de sua solução deve estar boa.
(*4*) Enuncie claramente qualquer resultado que você usar. Você só pode usar conceitos e resultados estudados nesta disciplina até agora. (Por exemplo, não conhecemos e muito menos desenvolvemos o conceito de determinantes.)
(*5*) As respostas devem estar nos locais indicados.
(*6*) Não é permitido o uso de aparelhos eletrônicos de qualquer natureza.
(*7*) Não destaque as folhas deste caderno.
(*8*) Não use folhas avulsas para rascunho. Não é necessário apagar seus rascunhos.
(*9*) Não é permitido consultar nenhum material ou consultar colegas.

Assinatura:

Sua assinatura acima atesta a autenticidade e originalidade de seu trabalho e que você compromete-se a seguir o código de ética da USP em todas as suas atividades, incluindo esta prova.

Boa sorte!

Q	0	1	2	3	**Total**
Nota					

Q0. **[0.5 pontos]** Leia o conteúdo desta página e preencha os itens requisitados. Assine acima, e atente ao significado de sua assinatura.

Data: 2025/12/10, 6:20pm

Q1. [3.5 pontos] Nesta questão, trabalhamos sobre GF(2). Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{1}$$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

(i) Calcule MA e NM. Lembre que estamos trabalhando sobre GF(2). [*Observação.* Tome cuidado. Esses cálculos serão úteis em itens posteriores.]

Resposta:

Resposta (continuação):

(*ii*) Seja $S \in \mathbb{F}^{m\times n}$ uma matriz. O que é o espaço nulo $\operatorname{Null} S$ da matriz S?

Resposta:

(*iii*) Considere agora a matriz

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{GF}(2)^{8\times 6}. \tag{3}$$

Dê dois vetores linearmente independentes que pertencem a $\operatorname{Null} C$. [*Sugestão.* Compare A com C.]

Resposta:

(*iv*) Encontre uma base para $\operatorname{Null} C$. Justifique sua resposta **cuidadosamente**: diga por que os vetores que você deu de fato formam uma base de $\operatorname{Null} C$.

Resposta:

Q2. [4 pontos]

(i) Seja $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ uma matriz. O que é o posto de A (*rank* de A)?

Resposta:

(ii) A resposta ao item anterior pode ser dada de várias formas equivalentes. Dê a resposta em termos de cada um dos seguintes objetos:

$$\operatorname{Col} A = \{A\mathbf{x} \colon \mathbf{x} \in \mathbb{F}^n\}, \tag{4}$$

$$\operatorname{Row} A = \{\mathbf{y}^\top A \colon \mathbf{y} \in \mathbb{F}^m\}, \tag{5}$$

as colunas $A_{*1}, \dots, A_{*n}$ de A e, finalmente, as linhas $A_{1*}, \dots, A_{m*}$ de A.

Resposta:

(iii) Suponha que $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ tenha posto $r > 0$. Prove que existem matrizes B e C, com B uma matriz com r colunas, tais que $A = BC$. É verdade que podemos exigir que as r colunas de B sejam colunas de A?

Resposta:

(*iv*) Sejam B e C como no item anteior. Prove que $\operatorname{Row} A \subset \operatorname{Row} C$. É verdade que $\operatorname{Row} A = \operatorname{Row} C$?

Resposta:

Q3. [**4 pontos**] Nesta questão, trabalhamos em $\mathbb{R}^n$ e consideramos o produto interno padrão $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{y}^\top \mathbf{x}$ ($\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$). Seja $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ um vetor unitário ($\|\mathbf{u}\| = 1$). Seja

$$Q = I_n - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^\top, \tag{6}$$

onde I_n é a matriz identidade $n \times n$.

(i) Prove que Q é uma matriz ortogonal, isto é, que $Q^\top Q = I_n$.

Resposta:

(ii) Considere

$$U = \operatorname{Span}\{\mathbf{u}\} \tag{7}$$

e

$$V = U^\perp = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \colon \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = 0\}. \tag{8}$$

Calcule $Q\mathbf{x}$ supondo que $\mathbf{x} \in U$. Calcule $Q\mathbf{y}$ supondo que $\mathbf{y} \in V$.

Resposta:

(*iii*) Suponha que $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ formem uma base de V. Prove que $\mathbf{u}, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ formam uma base de $\mathbb{R}^n$.

Resposta:

(*iv*) Seja S a matriz cujas colunas são $\mathbf{u}, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$, isto é, $S = [\mathbf{u} \mid \mathbf{v}_1 \mid \cdots \mid \mathbf{v}_m]$. Prove que S é inversível.

Resposta:

(v) Calcule $S^{-1}QS$.

Resposta:

* * *

Rascunho:

Rascunho:

Rascunho: