PROVA DE RECUPERAÇÃO

MAT0122 ÁLGEBRA LINEAR I (BCC)

2^{O} SEMESTRE DE 2025

Nome completo: ____

NUSP: ____

Instruções:

(*1*) Esta prova é individual.
(*2*) A prova consiste de **4** questões (contando a Questão 0 nesta página). Note que é possível tirar mais de 10 nesta prova `:-)`
(*3*) Para ter nota integral em uma questão, a escrita de sua solução deve estar boa.
(*4*) Enuncie claramente qualquer resultado que você usar. Você só pode usar conceitos e resultados estudados nesta disciplina até agora. (Por exemplo, não conhecemos e muito menos desenvolvemos o conceito de determinantes.)
(*5*) As respostas devem estar nos locais indicados.
(*6*) Não é permitido o uso de aparelhos eletrônicos de qualquer natureza.
(*7*) Não destaque as folhas deste caderno.
(*8*) Não use folhas avulsas para rascunho. Não é necessário apagar seus rascunhos.
(*9*) Não é permitido consultar nenhum material ou consultar colegas.

Assinatura:

Sua assinatura acima atesta a autenticidade e originalidade de seu trabalho e que você compromete-se a seguir o código de ética da USP em todas as suas atividades, incluindo esta prova.

Boa sorte!

Q	0	1	2	3	**Total**
Nota					

Q0. **[0.5 pontos]** Leia o conteúdo desta página e preencha os itens requisitados. Assine acima, e atente ao significado de sua assinatura.

Data: 2026/2/2, 7:33pm

Q1. **[3.5 pontos]** Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{F}$ e sejam $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ elementos de V.

(i) O que significa dizer que $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ são linearmente independentes?

Resposta:

(ii) O que significa dizer que $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ geram V?

Resposta:

(iii) O que significa dizer que $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ formam um base de V?

Resposta:

(iv) Seja $S \subset V$ um conjunto de vetores linearmente independentes maximal, isto é, tal que se $S \subset S' \subset V$ e $S \neq S'$, então S' não é linearmente independente. Prove que S é uma base de V.

Resposta:

Resposta (continuação):

(*v*) Seja $T \subset V$ um conjunto de vetores que gera V, minimal com essa propriedade, isto é, tal que se $T' \subset T$ e $T' \neq T$, então T' não gera V. Prove que T é uma base de V.

Resposta:

Q2. [4 pontos]

(i) O que significa dizer que $f\colon \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ é uma função linear?

Resposta:

(ii) O que significa dizer que $f\colon \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ é inversível? [*Observação.* Se você for usar o conceito de função inversa, defina este conceito.]

Resposta:

(iii) Seja $f\colon \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ uma função linear inversível. Prove que $n = m$. Enuncie claramente qualquer resultado que você usar em sua demonstração.

Resposta:

(iv) Seja $M \in \mathbb{F}^{m\times n}$ uma matriz $m \times n$. O que significa dizer que M é inversível?

Resposta:

(v) Considere as matrizes reais

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Determine AB.

Resposta:

(vi) Encontre matrizes reais $S \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ e $T \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ tais que $ST = I_4$, onde I_4 é a matriz identidade 4×4. [*Observação.* Note que queremos que S seja 4×3 e que T seja 3×4.] Alternativamente, prove que não existem tais matrizes. Justifique sua resposta claramente.

Resposta:

Resposta (continuação):

Q3. [**4 pontos**] Seja $A \in \mathbb{F}^{m\times m}$ uma matriz $m \times m$ com entradas em um corpo $\mathbb{F}$. Suponha que

$$A^2 = A. \tag{2}$$

(i) Seja λ um autovalor de A. Prove que $\lambda \in \{0, 1\}$.

Resposta:

(ii) Sejam $V = \operatorname{Col} A \subset \mathbb{F}^m$ e $W = \operatorname{Null} A \subset \mathbb{F}^m$ o espaço gerado pelas colunas de A e o espaço nulo de A. Prove que $A\mathbf{v} = \mathbf{v}$ para todo $\mathbf{v} \in V$.

Resposta:

Resposta (continuação):

(*iii*) Prove que $V \cap W = \{0\}$.

Resposta:

(*iv*) Prove que $\mathbb{F}^m = V \oplus W$.

Resposta:

(v) Seja $B \subset V$ uma base de V. Seja $B' \subset W$ uma base de W. Prove que $B \cup B'$ é uma base de $\mathbb{F}^m$.

Resposta:

(vi) Suponha que $B = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ e $B' = \{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_s\}$, e considere a matriz

$$S = [\mathbf{v}_1 \mid \cdots \mid \mathbf{v}_r \mid \mathbf{w}_1 \mid \cdots \mid \mathbf{w}_s] \in \mathbb{F}^{m \times m}, \tag{3}$$

cujas colunas são os vetores $\mathbf{v}_i$ $(1 \leq i \leq r)$ e $\mathbf{w}_j$ $(1 \leq j \leq s)$. Prove que S é inversível.

Resposta:

(vii) Prove que A é diagonalizável. [*Sugestão.* Calcule AS.]

Resposta:

Resposta:

* * *

Rascunho:

Rascunho:

Rascunho: