

PROVA 1  
MAT0122 ÁLGEBRA LINEAR I (BCC)  
2<sup>o</sup> SEMESTRE DE 2025

Nome completo: \_\_\_\_\_

NUSP: \_\_\_\_\_

**Instruções:**

- (1) Esta prova é individual.
- (2) A prova consiste de 4 questões (contando a Questão 0 nesta página). Note que é possível tirar mais de 10 nesta prova :-)
- (3) Para ter nota integral em uma questão, a escrita de sua solução deve estar boa.
- (4) Enuncie claramente qualquer resultado que você usar. Você só pode usar conceitos e resultados estudados nesta disciplina até agora. (Por exemplo, não conhecemos e muito menos desenvolvemos o conceito de determinantes.)
- (5) As respostas devem estar nos locais indicados.
- (6) Não é permitido o uso de aparelhos eletrônicos de qualquer natureza.
- (7) Não destaque as folhas deste caderno.
- (8) Não use folhas avulsas para rascunho. Não é necessário apagar seus rascunhos.
- (9) Não é permitido consultar nenhum material ou consultar colegas.

*Assinatura:*

*Sua assinatura acima atesta a autenticidade e originalidade de seu trabalho e que você compromete-se a seguir o código de ética da USP em todas as suas atividades, incluindo esta prova.*

Boa sorte!

| Q    | 0 | 1 | 2 | 3 | Total |
|------|---|---|---|---|-------|
| Nota |   |   |   |   |       |

**Q0. [0.5 pontos]** Leia o conteúdo desta página e preencha os itens requisitados. Assine acima, e atente ao significado de sua assinatura.

**Q1. [4 pontos]**

(i) Sejam dados  $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$  e  $\mathbf{b} \in \mathbb{F}^m$ . Considere as seguintes duas afirmações:

(A) Existe  $\mathbf{v} \in \mathbb{F}^n$  tal que  $A\mathbf{v} = \mathbf{b}$ .

(B) Existe  $\mathbf{u} \in \mathbb{F}^m$  tal que  $\mathbf{u}^\top A = \mathbf{0}$  e  $\mathbf{u}^\top \mathbf{b} \neq 0$ .

Prove que as afirmações (A) e (B) não podem valer simultaneamente.

*Resposta:*

(ii) Considere agora as seguintes matrizes com entradas em  $\text{GF}(2)$ :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

e

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Calcule os produtos  $MA$  e  $NM$ .

*Resposta:*

*Resposta* (continuação):

- (iii) Considere agora o vetor  $\mathbf{b} = (1, 1, 1, 0, 1) \in \text{GF}(2)^5$  e considere a equação  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  (naturalmente, consideramos  $\mathbf{b}$  como um vetor coluna nesta equação). Prove que esta equação não tem solução, exibindo um vetor  $\mathbf{u}$  como em  $(B)$  do item  $(i)$  acima. Verifique que sua escolha de  $\mathbf{u}$  de fato funciona. [*Sugestão.* Considere as linhas da matriz  $M$ .]

*Resposta:*

- (iv) Considere agora o vetor  $\mathbf{b}' = (0, 1, 1, 0, 1) \in \text{GF}(2)^5$  e considere a equação  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ . Encontre uma solução para esta equação, multiplicando seus dois lados pela esquerda por  $M$ , obtendo  $MA\mathbf{x} = M\mathbf{b}'$ , e resolvendo esta nova equação. Por que uma solução para esta outra equação é uma solução para a equação original?

*Resposta:*

**Q2. [3.5 pontos]**

- (i) Sejam  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  vetores em um espaço vetorial sobre um corpo  $\mathbb{F}$ . O que é uma combinação linear desses vetores  $\mathbf{v}_i$ ?

*Resposta:*

- (ii) Sejam  $\mathbf{v}_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) como no item anterior. O que é o conjunto  $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$  gerado por esses  $\mathbf{v}_i$ ?

*Resposta:*

- (iii) Sejam  $\mathbf{v}_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) como no item anterior. O que significa dizer que esses vetores são linearmente independentes?

*Resposta:*

*Resposta* (continuação):

- (iv) Considere a matriz  $M$  da Questão **Q1**. Sejam  $\mathbf{v}_i$  ( $1 \leq i \leq 5$ ) as colunas de  $M$ , considerados como vetores em  $\text{GF}(2)^5$ . Prove que os  $\mathbf{v}_i$  ( $1 \leq i \leq 5$ ) são linearmente independentes. [*Sugestão*. Considere a matriz  $N$ .]

*Resposta*:

- (v) Considere agora a matriz  $N$  da Questão **Q1**. Sejam  $\mathbf{w}_i$  ( $1 \leq i \leq 5$ ) as colunas de  $N$ , considerados como vetores em  $\text{GF}(2)^5$ . Prove que  $\text{Span}\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_5\} = \text{GF}(2)^5$ . [*Sugestão*. Considere a matriz  $M$ .]

Resposta:



**Q3.** [4 pontos] Seja  $G = (V, E)$  o grafo da Figura 1. Para cada aresta  $e = \{x, y\}$  de  $G$ , consideramos o vetor característico  $\mathbf{1}_e = \mathbf{1}_{\{x, y\}} \in \text{GF}(2)^V$  associado. A *matriz de incidência*  $M$  de  $G$  é a matriz  $V \times E$  cuja  $e$ -ésima coluna é  $\mathbf{1}_e$  ( $e \in E$ ).

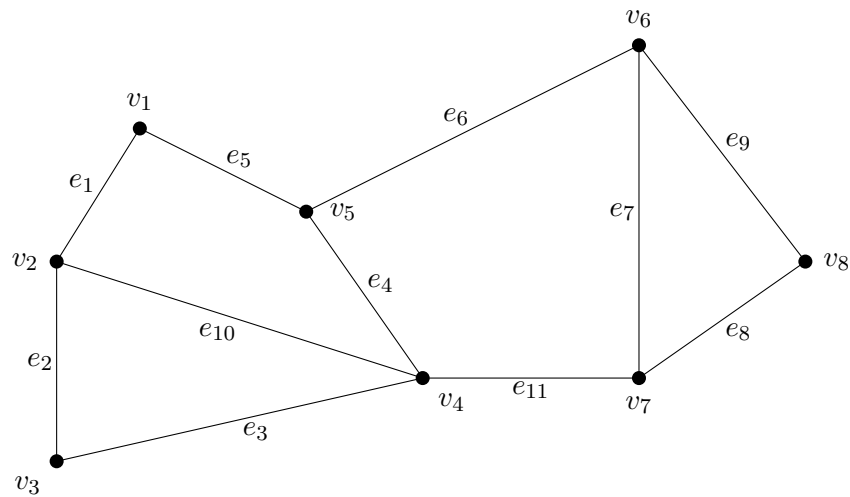


FIGURA 1. O grafo  $G$ , com 8 vértices e 11 arestas

(i) Seja  $F = \{e_1, e_4, e_5, e_6\} \subset E$  e  $F' = F \cup \{e_{10}\}$ . Calcule  $M\mathbf{1}_F$  e  $M\mathbf{1}_{F'}$ .

*Resposta:*

- (ii) Lembre que um *ciclo* em  $G$  é um conjunto de arestas  $F$  tal que  $M\mathbf{1}_F = \mathbf{0}$ , isto é,  $\mathbf{1}_F \in \text{Null } M$ . Encontre um ciclo de  $G$  que contém as quatro arestas  $e_3$ ,  $e_4$ ,  $e_{10}$  e  $e_{11}$ .

*Resposta:*

- (iii) Lembre que  $T = (V, F)$  é uma *floresta geradora* de  $G$  se  $F$  é
- (a) *acíclico*, isto é, os vetores  $\mathbf{1}_f$  ( $f \in F$ ) são linearmente independentes, e
  - (b) *aresta-gerador*, isto é, para todo  $e \in E$ , vale que  $\mathbf{1}_e \in \text{Span}\{\mathbf{1}_f : f \in F\}$ .
- Encontre uma floresta geradora  $T = (V, F)$  de  $G$  tal que a quantidade

$$\sum \{i : e_i \in F\} \tag{3}$$

é a menor possível (isto é, queremos minimizar a soma dos índices das arestas em  $F$ ). Dê sua resposta em uma figura. Diga em poucas palavras como você encontrou sua resposta.

*Resposta:*

(iv) Encontre uma floresta geradora  $T' = (V, F')$  de  $G$  tal que a quantidade

$$\sum \{i: e_i \in F'\} \tag{4}$$

é a maior possível (isto é, queremos agora maximizar a soma dos índices das arestas em  $F'$ ). Dê sua resposta em uma figura. Diga em poucas palavras como você encontrou sua resposta. Justifique por que o que você fez de fato maximiza a quantidade em (4).

*Resposta:*

*Resposta* (continuação):

\* \* \*

*Rascunho:*

A large, empty rectangular box with a thin black border, intended for a draft or sketch. It occupies the majority of the page area below the 'Rascunho:' label.

*Rascunho:*

