PROVA DE RECUPERAÇÃO

MAT0122 ÁLGEBRA LINEAR I (BCC)

2º SEMESTRE DE 2024

Nome completo: _____

NUSP: _____

Instruções:

(*1*) Esta prova é individual.
(*2*) A prova consiste de **4** questões (contando a Questão 0 nesta página). Note que é possível tirar mais de 10 nesta prova `:-)`
(*3*) Para ter nota integral em uma questão, a escrita de sua solução deve estar boa.
(*4*) Cálculos relevantes devem constar em suas respostas, possivelmente no rascunho.
(*5*) Enuncie claramente qualquer resultado que você usar. Você só pode usar conceitos e resultados estudados nesta disciplina ao longo do semestre. (Por exemplo, não conhecemos e muito menos desenvolvemos o conceito de determinantes.)
(*6*) As respostas devem estar nos locais indicados.
(*7*) Não é permitido o uso de aparelhos eletrônicos de qualquer natureza.
(*8*) Não destaque as folhas deste caderno.
(*9*) Não use folhas avulsas para rascunho. Não é necessário apagar seus rascunhos.
(*10*) Não é permitido consultar nenhum material ou consultar colegas.

Assinatura:

Sua assinatura acima atesta a autenticidade e originalidade de seu trabalho e que você compromete-se a seguir o código de ética da USP em todas as suas atividades, incluindo esta prova.

Boa sorte!

Q	0	1	2	3	**Total**
Nota					

Q0. **[0.5 pontos]** Leia o conteúdo desta página e preencha os itens requisitados. Assine acima, e atente ao significado de sua assinatura.

Data: 2025/2/12, 12:29 Noon

Q1. [3.5 pontos] Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{GF}(2)^{3\times 5}. \tag{1}$$

(i) Dê uma base para $\operatorname{Null} A$.

Resposta:

(ii) Exiba uma matriz B tal que $\operatorname{Null} B$ é o espaço $\operatorname{Col} A^\top$ gerado pelas colunas de $A^\top$.

Resposta:

(iii) Dada uma matriz M, enuncie uma identidade que é necessariamente satisfeita e que envolve as seguintes três quantidades: o número de colunas em M, o posto de M e a nulidade de M (isto é, $\dim \operatorname{Null} M$).

Resposta:

(iv) Justifique aqui por que sua resposta para (i) acima está correta.

Resposta:

(v) Justifique aqui por que sua resposta para (ii) acima está correta.

Resposta:

Q2. **[4 pontos]** Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{F}$.

(i) Seja $A \subset V$ e $\mathbf{b} \in (\operatorname{Span} A) \setminus A$ um vetor não-nulo. Prove que existe $\mathbf{a} \in A$ tal que $\operatorname{Span}((A \setminus \{\mathbf{a}\}) \cup \{\mathbf{b}\}) = \operatorname{Span} A$.

Resposta:

(ii) Sejam $A \subset V$, $A' \subset A$ e $\mathbf{b} \in (\operatorname{Span} A) \setminus A$ tais que $A' \cup \{\mathbf{b}\}$ é linearmente independente. Prove que existe $\mathbf{a} \in A \setminus A'$ tal que $\operatorname{Span}((A \setminus \{\mathbf{a}\}) \cup \{\mathbf{b}\}) = \operatorname{Span} A$.

Resposta:

(iii) Suponha que S e T sejam subconjuntos de V com $\operatorname{Span} S = V$ e T linearmente independente. Suponha que S seja um conjunto finito. Prove que ou $T \subset S$ ou existe $S' \subset V$ com $|S' \cap T| > |S \cap T|$ tal que $\operatorname{Span} S' = V$ e $|S'| = |S|$. [*Sugestão.* Aplique (ii) escolhendo A, A' e $\mathbf{b}$ adequadamente. Não se esqueça de verificar que suas escolhas são válidas.]

Resposta:

(*iv*) Suponha que S e T sejam subconjuntos de V com $\operatorname{Span} S = V$ e T linearmente independente. Suponha que S seja um conjunto finito. Deduza dos itens anteriores que $|T| \leq |S|$. [*Sugestão.* Considere $S^* \subset V$ com $\operatorname{Span} S^* = V$ e $|S^*| = |S|$ tal que $|S^* \cap T|$ seja máximo.]

Resposta:

(*v*) Suponha que S e T sejam subconjuntos de V com $\operatorname{Span} S = V$ e T linearmente independente. Suponha que S seja um conjunto finito e que $|T| = |S|$. Prove que $\operatorname{Span} T = V$ e que S é linearmente independente.

Resposta:

(*vi*) O que é uma *base* de um espaço vetorial?

Resposta:

(*vii*) Suponha que exista $S \subset V$ finito com $\operatorname{Span} S = V$. Sejam B_1 e B_2 duas bases de V. Deduza dos itens anteriores que $|B_1| = |B_2|$.

Resposta:

Resposta (continuação):

(*viii*) Seja $T \subset V$ um conjunto de vetores linearmente independentes. Suponha que exista $S \subset V$ finito com $\operatorname{Span} S = V$. Prove que existe uma base B de V tal que $B = T \cup S'$ e $S' \subset S$. [*Sugestão.* Considere $S' \subset S$ de cardinalidade mínima tal que $T \cup S'$ seja gerador.]

Resposta:

Q3. **[4 pontos]** Nesta questão, trabalharemos em $\mathbb{R}^m$. Os elementos de $\mathbb{R}^m$ serão considerados como vetores coluna e usaremos o produto interno padrão, dado por $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \mathbf{w}^\top \mathbf{v}$.

Suponha que $\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n \in \mathbb{R}^m$ sejam n vetores ortonormais, isto é, tais que $\langle \mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j \rangle = 0$ se $i \neq j$ e $\langle \mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j \rangle = 1$ se $i = j$. Seja $V = \text{Span}\{\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n\}$. Seja Q a matriz real $m \times n$ cuja j-ésima coluna é o vetor $\mathbf{q}_j$ $(1 \leq j \leq n)$. Seja $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ um vetor dado. Sejam $\mathbf{a}_0 = QQ^\top \mathbf{b}$ e $\mathbf{a}_1 = \mathbf{b} - \mathbf{a}_0$.

(i) Prove que $\mathbf{a}_0 \in V$.

Resposta:

(ii) Prove que $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{v} \rangle = 0$ para todo $\mathbf{v} \in V$.

Resposta:

(*iii*) Lembre que existem $\mathbf{b}^{\parallel}$ e $\mathbf{b}^{\perp}$ em $\mathbb{R}^m$ tais que $\mathbf{b} = \mathbf{b}^{\parallel} + \mathbf{b}^{\perp}$, $\mathbf{b}^{\parallel} \in V$, $\langle \mathbf{b}^{\perp}, \mathbf{v} \rangle = 0$ para todo $\mathbf{v} \in V$. Ademais, lembre que tais $\mathbf{b}^{\parallel}$ e $\mathbf{b}^{\perp}$ são univocamente definidos por estas três propriedades. Prove que $\mathbf{b}^{\parallel} = QQ^{\top}\mathbf{b}$ usando (*i*) e (*ii*) acima.

Resposta:

Suponha agora que temos uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, e que queremos encontrar $\widehat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\|A\widehat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\| = \min\{\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\| : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}. \tag{2}$$

Você pode supor conhecido que isso significa dizer que queremos encontrar $\widehat{\mathbf{x}}$ tal que $A\widehat{\mathbf{x}} = \mathbf{b}^{\parallel}$. Note que podemos supor que as as colunas de A são linearmente independentes; adotamos esta hipótese no que segue.

(*iv*) O que é uma *decomposição QR* de A?

Resposta:

(*v*) Prove que $A^\top A$ é inversível.

Resposta:

(*vi*) Prove que $\widehat{\mathbf{x}} = (A^\top A)^{-1} A^\top \mathbf{b}$ satisfaz (2).

Resposta:

Rascunho:

Rascunho: