

ÁLGEBRA LINEAR I

2º SEMESTRE DE 2022

EXERCÍCIOS DE REVISÃO PARA A P2

Estes são uns exercícios de revisão para a segunda prova. As perguntas nos *review questions* de **PNK** (Capítulos 6, 7, 8, 9 e 12) devem também ser revisados.

- Q1** Prove o seguinte fato: não há $n + 1$ vetores linearmente independentes em \mathbb{F}^n . Procure dar uma prova simples e completa, que dependa o menos possível de fatos provados na disciplina (ou inclua a prova dos fatos que você usar, para sua prova ficar completa).
- Q2** Prove o seguinte fato: se M é uma matriz quadrada $n \times n$ com posto n , então M é inversível. Procure dar uma prova simples e completa, que dependa o menos possível de fatos provados na disciplina (ou inclua a prova dos fatos que você usar, para sua prova ficar completa).
- Q3** Seja $U \in \mathbb{F}^{m \times n}$ uma matriz na forma escalonada, com m_1 linhas não-nulas e m_2 linhas nulas (naturalmente, $m = m_1 + m_2$). Quantas *colunas* linearmente independentes tem a matriz U ?
- Q4** Para cada uma das afirmações abaixo, diga se ela é verdadeira ou não. Em cada caso, justifique sua resposta.
- (i) Seja $U \subset \mathbb{F}^n$ um espaço vetorial. Vale que $\mathbb{F}^n = U \oplus U^\circ$.
 - (ii) Seja $U \subset \mathbb{F}^n$ um espaço vetorial. Vale que $\dim U + \dim U^\circ = n$.
 - (iii) Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um espaço vetorial e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ um produto interno em \mathbb{R}^n . Vale que $\mathbb{R}^n = U \oplus U^\perp$.
 - (iv) Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um espaço vetorial e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ um produto interno em \mathbb{R}^n . Vale que $\dim U + \dim U^\perp = n$.
- Q5** Suponha que as matrizes $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ e $B \in \mathbb{F}^{n \times m}$ são tais $AB = I_m$, onde $I_m \in \mathbb{F}^{m \times m}$ é a matriz identidade.
- (i) Prove que as colunas de B são linearmente independentes.
 - (ii) Prove que as colunas de A geram \mathbb{F}^m .
- Q6** Seja M uma matriz tal que $M^\top M$ é a matriz identidade. É verdade que MM^\top é a matriz identidade? Por quê? Há alguma hipótese simples sobre M que garanta a resposta positiva?
- Q7** Fixe $b_1 \in \text{GF}(2)$ e $b_2 \in \text{GF}(2)$ e considere ‘bitstrings’ $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_6) \in \text{GF}(2)^6$. Tais bitstrings \mathbf{x} são chamados do tipo (b_1, b_2) se $x_1 + x_3 + x_5 = b_1$ e $x_2 + x_4 + x_6 = b_2$. Quantos bitstrings do tipo (b_1, b_2) existem?

Q8 Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

(i) Prove que A é inversível como uma matriz real.

(ii) Prove que A não é inversível como uma matriz sobre $\text{GF}(2)$.

Q9 Considere a matriz $A_n = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \text{GF}(2)^{n \times n}$ com

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i = j \\ 1 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2)$$

(i) Prove que A_n é inversível no caso em que n é par.

(ii) Prove que A_n não é inversível no caso em que n é ímpar.

(iii) Prove que A_n tem posto $n - 1$ no caso em que n é ímpar.

Q10 Seja $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ uma matriz quadrada. Monte a matriz

$$A' = \begin{bmatrix} A & I_n \end{bmatrix}, \quad (3)$$

onde $I_n \in \mathbb{F}^{n \times n}$ é a matriz identidade. Suponha que executamos operações de escalonamento, e conseguimos transformar A' na matriz

$$\begin{bmatrix} I_n & B \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Note que não apenas escalonamos A , mas prosseguimos o processo até obter a identidade I_n (é fácil ver que isso é possível de se fazer caso obtenhamos no processo de escalonamento de A uma matriz U que tem todos seus elementos diagonais não nulos). Prove que B é a inversa de A . [*Observação.* Esse fato sugere um algoritmo para se inverter A .]

Q11 Suponha que executamos o algoritmo sugerido na Questão **Q10** para inverter uma matriz A , mas a matriz escalonada que obtemos no meio do processo é tal que há zeros na diagonal. Prove que A não é inversível.

Q12 Considere a equação $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sobre $\text{GF}(2)$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Prove que esta equação não tem solução, considerando o vetor $\mathbf{y} = [1 \ 0 \ 1 \ 1]^\top \in \text{GF}(2)^4$. [*Sugestão.* Multiplique por \mathbf{y}^\top .]

Q13 Considere a equação $U\mathbf{x} = \mathbf{b}$, onde $U \in \mathbb{F}^{m \times n}$ é uma matriz escalonada e $\mathbf{b} = [b_1 \ \dots \ b_m]^\top \in \mathbb{F}^m$. Suponha que U tenha m_1 linhas não-nulas e m_2 linhas nulas

(naturalmente $m = m_1 + m_2$). Prove que $U\mathbf{x} = \mathbf{b}$ admite uma solução se e só se $b_{m_1+1} = \dots = b_m = 0$.

Q14 Considere a equação $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, onde $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ e $\mathbf{b} \in \mathbb{F}^m$. Considere as duas afirmações abaixo:

(A) A equação $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ admite solução (isto é, existe $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{F}^n$ tal que $A\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}$).

(B) Existe $\mathbf{y} \in \mathbb{F}^m$ tal que $\mathbf{y}^\top A = \mathbf{0}$ e $\mathbf{y}^\top \mathbf{b} \neq 0$.

Prove os seguintes dois fatos:

(i) As afirmações (A) e (B) não podem valer simultaneamente.

(ii) Necessariamente, ou a afirmação (A) vale ou a afirmação (B) vale.

Q15 Sejam $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \in \mathbb{R}^n$ vetores dois a dois ortogonais e seja $\mathbf{u} = \sum_{1 \leq i \leq n} \mathbf{u}_i$. Prove que

$$\|\mathbf{u}\|^2 = \sum_{1 \leq i \leq n} \|\mathbf{u}_i\|^2. \quad (6)$$

Q16 Seja

$$H = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

e sejam $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_4 \in \mathbb{R}^4$ as colunas de H . Assim $H = [\mathbf{b}_1 \mid \dots \mid \mathbf{b}_4]$. Seja $V = \text{Span}\{\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4\}$ e $\mathbf{e}_1 = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^\top \in \mathbb{R}^4$. Encontre a projeção ortogonal sobre V de \mathbf{e}_1 e a projeção ortogonal a V de \mathbf{e}_1 . Isto é, encontre $\mathbf{e}_1^{\parallel V}$ e $\mathbf{e}_1^{\perp V}$ de forma que $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1^{\parallel V} + \mathbf{e}_1^{\perp V}$, $\mathbf{e}_1^{\parallel V} \in V$ e $\langle \mathbf{e}_1^{\perp V}, \mathbf{v} \rangle = 0$ para todo $\mathbf{v} \in V$.

Q17 Sejam $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ vetores em \mathbb{R}^n . Suponha que $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ é tal que $\langle \mathbf{x}, \mathbf{b} \rangle = 0$ para todo $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{b} \rangle = 0$ para todo $1 \leq i \leq m$. Prove que $\mathbf{b} \in \text{Span}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m\}$.

Q18 Considere o sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, onde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Queremos encontrar $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\|A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\| = \min\{\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\| : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}. \quad (8)$$

(i) Diga por que podemos supor que as colunas de A são linearmente independentes.

Nos itens a seguir, supomos que as colunas de A são linearmente independentes.

(ii) Prove que $A^\top A$ é inversível.

(iii) Prove que $\hat{\mathbf{x}} = (A^\top A)^{-1} A^\top \mathbf{b}$ satisfaz (8).

Q19 Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{u}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Defina \mathbf{u}_t ($t \geq 1$) pondo $\mathbf{u}_t = A\mathbf{u}_{t-1}$. Defina F_t ($t \geq 0$) pondo $F_t = t$ para $t = 0$ e $t = 1$ e $F_t = F_{t-1} + F_{t-2}$ para $t \geq 2$.

(i) Prove que $\mathbf{u}_t = [F_t \ F_{t-1}]^\top$ para todo $t \geq 1$.

(ii) Deduza que, para todo $t \geq 0$,

$$F_t = \frac{1}{\sqrt{5}} (\varphi_1^t - \varphi_2^t), \quad (10)$$

onde $\varphi_1 = (1 + \sqrt{5})/2$ e $\varphi_2 = (1 - \sqrt{5})/2$.