ÁLGEBRA LINEAR I

2^O SEMESTRE DE 2022

EXERCÍCIOS DE REVISÃO PARA A P1

Estes são uns exercícios de revisão para a primeira prova. Estes exercícios são um pouco inspirados nos *review questions* de **PNK** (Capítulos 3 a 5).

Q1 Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$ e seja $S \subset V$. O que é uma combinação linear de vetores de S?

Q2 Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$ e seja $S \subset V$. O que é uma combinação linear afim de vetores de S?

Q3 Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ ou sobre $\mathbb{C}$ e seja $S \subset V$. O que é uma combinação linear convexa de vetores de S?

Q4 Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$ e seja $S \subset V$. O que é o espaço $\operatorname{Span} S$ gerado por S?

Q5 Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$. Sejam dados X um subconjunto de V e $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ elementos de V.

(i) Prove que se $\mathbf{v} \in \operatorname{Span}(X \cup \{\mathbf{w}\}) \setminus \operatorname{Span} X$, então $\mathbf{w} \in \operatorname{Span}(X \cup \{\mathbf{v}\}) \setminus \operatorname{Span} X$.

(ii) É verdade que se $\mathbf{v} \in \operatorname{Span}(X \cup \{\mathbf{w}\})$, então $\mathbf{w} \in \operatorname{Span}(X \cup \{\mathbf{v}\})$?

Q6 (i) Sejam dados $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{F}^D$ e seja $S = \{\mathbf{v}_i \colon 1 \le i \le n\}$. Seja $[n] = \{1, \dots, n\}$ e considere a matriz $M \in \mathbb{F}^{D \times [n]}$ cujas colunas são os vetores $\mathbf{v}_i$ $(1 \le i \le n)$:

$$M = [\mathbf{v}_1 \mid \cdots \mid \mathbf{v}_n]. \tag{1}$$

Prove que

$$\operatorname{Span} S = \big\{ M\mathbf{w} \colon \mathbf{w} \in \mathbb{F}^{[n]} \big\}. \tag{2}$$

(ii) Seja $V \subset \mathbb{F}^D$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$ e seja $X \subset V$. Seja $Y = \operatorname{Span} X$. Prove que $\operatorname{Span} Y = Y$.

Q7 Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$ e seja $S \subset V$. O espaço $\operatorname{Span} S$ gerado por S é um espaço vetorial? Justifique.

Q8 Sejam dados $\mathbf{a}_i \in \mathbb{F}^D$ $(1 \le i \le n)$ e considere o sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{x} = 0 \\ \qquad \dots \\ \mathbf{a}_n \cdot \mathbf{x} = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Data: 2022/12/14, 9:26pm

Seja $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{F}^D \colon \mathbf{x} \text{ satisfaz } (3)\}$ o conjunto das soluções de (3). Prove que S é um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$.

Q9 Seja $M \in \mathbb{F}^{R\times C}$ uma matriz. O que é o espaço nulo $\operatorname{Null} M$ de M?

Q10 Seja $M \in \mathbb{F}^{R\times C}$ uma matriz. O espaço nulo $\operatorname{Null} M$ de M é um espaço vetorial? Justifique.

Q11 Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$ e seja $S \subset V$. O que é o espaço afim $\operatorname{Aff} S$ gerado por S?

Q12 Sejam dados $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{F}^D$ e seja $S = \{\mathbf{v}_i \colon 1 \leq i \leq n\}$. Seja $[n] = \{1, \ldots, n\}$ e considere a matriz $M \in \mathbb{F}^{D\times[n]}$ cujas colunas são os vetores $\mathbf{v}_i$ ($1 \leq i \leq n$):

$$M = [\mathbf{v}_1 \mid \cdots \mid \mathbf{v}_n]. \tag{4}$$

Seja $\mathbf{j} \in \mathbb{F}^{[n]}$ o vetor cujas entradas são todas 1. Prove que

$$\operatorname{Aff} S = \{M\mathbf{w} \colon \mathbf{w} \in \mathbb{F}^{[n]} \text{ tal que } \mathbf{j} \cdot \mathbf{w} = 1\}. \tag{5}$$

Q13 Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$ e seja $S \subset V$. Dizemos que $X \subset V$ é *fechado por combinações afins* se a combinação afim de quaisquer elementos de X está em X.

(i) Prove que $\operatorname{Aff} S$ é fechado por combinações afins.

(ii) Seja $X = \operatorname{Aff} S$. Prove que $\operatorname{Aff} X = X$.

Q14 Considere os vetores

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad e \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

(i) Suponha que estamos trabalhando em $\mathbb{R}^3$, o espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Prove que $S = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ gera $\mathbb{R}^3$.

(ii) Suponha agora que estamos trabalhando em $\mathrm{GF}(2)^3$, o espaço vetorial sobre $\mathrm{GF}(2)$. Prove que $S = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ não gera $\mathrm{GF}(2)^3$.

Q15 Seja $f \colon V \to W$ uma função, onde $V \subset \mathbb{F}^n$ e $W \subset \mathbb{F}^m$ são espaços vetoriais. O que significa dizer que f é uma função linear?

Q16 Seja $f \colon \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ uma função linear.

(i) Descreva a matriz M tal que

$$f(\mathbf{v}) = M\mathbf{v} \tag{7}$$

para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{F}^n$.

(ii) Prove que sua matriz M é tal que (7) de fato vale para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{F}^n$.

(iii) Suponha que uma matriz N é tal que $f(\mathbf{v}) = N\mathbf{v}$ para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{F}^n$. Prove que $M = N$.

Q17 Sejam A uma matriz p por q e B uma matriz q por r com entradas em $\mathbb{F}$.

(i) Seja $\mathbf{v} \in \mathbb{F}^r$. Prove usando a definição de produto de matrizes que $A(B\mathbf{v}) = (AB)\mathbf{v}$.

(*ii*) Lembre que a matriz A define uma função linear $f_A\colon \mathbb{F}^q \to \mathbb{F}^p$ tal que $f_A(\mathbf{w}) = A\mathbf{w}$ para todo $\mathbf{w} \in \mathbb{F}^q$. Da mesma forma, B define uma função linear $f_B\colon \mathbb{F}^r \to \mathbb{F}^q$ e AB define uma função linear $f_{AB}\colon \mathbb{F}^r \to \mathbb{F}^p$. Prove que $f_A \circ f_B = f_{AB}$.

Q18 Seja $M = (m_{ij})_{1\le i,\,j\le n} \in \mathbb{F}^{n\times n}$ uma matriz $n \times n$ *triangular superior*, isto é, tal que $m_{ij} = 0$ se $1 \le j < i \le n$.

(*i*) Suponha que $m_{ii} \neq 0$ para todo $1 \le i \le n$. Prove que a função $f_M\colon \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ é inversível.

(*ii*) Suponha que $m_{ii} = 0$ para algum $1 \le i \le n$. Prove que a função $f_M\colon \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ não é injetora.

(*iii*) Suponha que $m_{ii} = 0$ para algum $1 \le i \le n$. Prove que a função $f_M\colon \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ não é sobrejetora.

Q19 Seja $M = (m_{ij})_{1\le i,\,j\le n} \in \mathbb{F}^{n\times n}$ uma matriz $n \times n$.

(*i*) Suponha que $m_{ij} = 0$ se $1 \le j \le i \le n$. Prove que $M^n = 0$.

(*ii*) Suponha que $m_{ij} = 0$ se $1 \le j \le i \le n$, exceto quando $i = j = 1$ e $m_{11} = 1$. Prove que $M^m \neq 0$ para qualquer inteiro $m \neq 0$.

(*iii*) Considere a matriz

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -4 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}. \tag{8}$$

Prove que $M^{122} \neq 0$.

Q20 Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$ e $S \subset V$.

(*i*) O que significa dizer que S é um conjunto linearmente dependente de vetores?

(*ii*) O que significa dizer que S é um conjunto linearmente independente de vetores?

(*iii*) O que significa dizer que S é uma base de V?

Q21 Seja $M = (m_{ij})_{1\le i,\,j\le n} \in \mathbb{F}^{n\times n}$ uma matriz $n \times n$ *triangular superior*, isto é, tal que $m_{ij} = 0$ se $1 \le j < i \le n$. Suponha que $m_{ii} \neq 0$ para todo $1 \le i \le n$. Prove que as colunas de M formam uma base de $\mathbb{F}^n$.

Q22 Considere os algoritmos Grow e Shrink vistos em sala e suponha que damos como entrada a esses algoritmos um espaço vetorial V sobre $\mathbb{F}$.

(*i*) Suponha que Grow termina com saída S. Prove que S é linearmente independente.

(*ii*) Suponha que Shrink termina com saída S. Prove que S é linearmente independente.

Q23 Sejam dados $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{F}^n$ linearmente independentes.

(*i*) Considere a matriz $M \in \mathbb{F}^{n\times n}$ cujas colunas são os vetores $\mathbf{v}_i$ ($1 \le i \le n$):

$$M = [\mathbf{v}_1 \mid \cdots \mid \mathbf{v}_n]. \tag{9}$$

Seja $f_M\colon \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ a função dada por $f_M(\mathbf{a}) = M\mathbf{a}$ para todo $\mathbf{a} \in \mathbb{F}^n$. Prove que $f_M^{-1}(\{\mathbf{0}\}) = \{\mathbf{0}\}$. Deduza que f_M é injetora.

(*ii*) Suponha que $\mathbf{w} \in \mathbb{F}^n$ é tal que

$$\mathbf{w} = \sum_{1 \le i \le n} \alpha_i \mathbf{v}_i \tag{10}$$

e

$$\mathbf{w} = \sum_{1 \le i \le n} \beta_i \mathbf{v}_i \tag{11}$$

para certos escalares α_i e β_i $(1 \le i \le n)$. Prove que $\alpha_i = \beta_i$ para todo $1 \le i \le n$.

Q24 Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$. Suponha que A e B sejam subconjuntos finitos de V com $|A| < |B|$. Ademais, suponha que tanto A como B sejam conjuntos linearmente independentes. Prove que existe $\mathbf{b} \in B \setminus A$ tal que $A \cup \{\mathbf{b}\}$ é linearmente independente.