ÁLGEBRA LINEAR I

2^{O} SEMESTRE DE 2022

EXERCÍCIOS

Entrega. Entregue suas soluções no e-Disciplinas.

Política de colaboração e uso de fontes. Todo trabalho entregue por você deve ser seu. Você é encorajado a discutir com seus colegas o material visto em sala e os enunciados dos exercícios, mas tome cuidado para não compartilhar seu trabalho além do permitido. Nos *exercícios individuais*, você não pode compartilhar suas soluções ou mesmo ideias de soluções. Nos *exercícios em grupo*, você só pode compartilhar suas ideias e soluções com membros de seu grupo. Nos exercícios em grupo, *cada membro do grupo deve escrever uma solução própria.* Ao entregar um exercício feito em grupo, não esqueça de escrever o nome de todos os membros do grupo em sua solução.

Você não deve procurar soluções de terceiros (como de amigos ou na Web). Caso você acidentalmente encontre e leia a solução de algum exercício em algum lugar, você deve citar esta fonte em sua solução. Caso você acidentalmente acabe colaborando com colegas na descoberta de uma solução, você deve citar esta colaboração em sua solução. Seu desempenho nesta disciplina ficará prejudicado caso você viole essas regras.

Fontes dos exercícios. Vários dos exercícios vêm de nossa bibliografia. Usamos as seguintes abreviaturas (outras abreviaturas poderão ser adicionadas posteriormente). **PNK:** Philip N. Klein, *Coding the matrix*; **SA:** Sheldon Axler, *Linear algebra done right* (3a edição).

Exercícios para entrega. Os exercícios para entrega estão marcados com uma data de entrega e são em geral individuais. Os exercícios que podem ser feitos em grupo estão claramente marcados dessa forma, e o número máximo de alunos por grupo está especificado.

Exercícios marcados (M). Os exercícios marcados (M) são para os matematicamente inclinados, e não serão cobrados nessa disciplina.

* * * * *

E1 Faça os Problemas 0.8.1 e 0.8.2 de **PNK**.

E2 Faça o Problema 0.8.3 de **PNK**. [*Observação.* Em exercícios que envolvem programação, entregue o código. Lembre-se de colocar o cabeçalho obrigatório.] ***{Data de entrega: 25/8/2022}***

E3 Faça os Problemas 0.8.4 e 0.8.11 de **PNK**.

E4 Sejam A e B conjuntos. Seja $\mathcal{P}(A) = \{S\colon S \subset A\}$ o conjunto dos subconjuntos de A (o *conjunto potência* de A ou *conjunto das partes* de A). Lembre que B^A é o conjunto das

Date: Versão de 2022/12/8, 6:39pm.

funções $f\colon A \to B$. Considere a função $F\colon \mathcal{P}(A) \to \{0,1\}^A$ tal que, para todo $S \in \mathcal{P}(A)$, temos

$$(F(S))(a) = \begin{cases} 1 & \text{se } a \in S \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{1}$$

Prove que F é bijetora. [*Observação.* A função $F(S)$ é conhecida como a *função característica* de S. É comum denotar $F(S)$ por $\mathbb{1}_S$ ou χ_S.] **{*Data de entrega*: 25/8/2022}**

E5 Faça o Task 1.4.10 de **PNK**. *Importante.* Não deixe de ver a errata para a 1a edição do livro na página do livro.

E6 Faça o Problema 1.5.1 de **PNK**. Não deixe de explicar como você chegou à resposta. **{*Data de entrega*: 1/9/2022}**

E7 Faça o Problema 2.14.4 de **PNK**.

E8 Faça o Problema 2.14.5 de **PNK**. No caso em que não haja subconjunto de $\{\mathbf{a}, \dots, \mathbf{f}\}$ que tem como soma o vetor desejado, justifique sua resposta (de forma elegante `:-)`). [*Sugestão.* Considere o produto escalar com o vetor 1011011.] **{*Data de entrega*: 1/9/2022}**

E9 Faça o Problema 2.14.6 de **PNK**.

E10 Faça o Problema 2.14.10 de **PNK**.

E11 Considere o sistema de $n \geq 1$ equações lineares

$$\begin{cases} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{x} = \beta_1 \\ \qquad \dots \\ \mathbf{a}_n \cdot \mathbf{x} = \beta_n \end{cases} \tag{2}$$

onde $\mathbf{a}_i = (a_{i1}, \dots, a_{in}) \in \mathbb{R}^n$ e $\beta_i \in \mathbb{R}$ $(1 \leq i \leq n)$, nas variáveis $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$. Ademais, suponha que $a_{ij} = 0$ para todo $1 \leq j < i \leq n$.

- (*i*) Suponha que $a_{ii} \neq 0$ para todo $1 \leq i \leq n$. Prove que o sistema (2) admite uma solução $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n) \in \mathbb{R}^n$.
- (*ii*) Prove que a solução $\hat{\mathbf{x}}$ acima é única.
- (*iii*) Suponha agora que, para um certo $1 \leq k \leq n$, temos que $a_{kk} = 0$. Prove que existe uma escolha de $(\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que o sistema (2) não admite nenhuma solução.
- (*iv*) No caso em que existe um k como no item anterior, é verdade que (2) não admite nenhuma solução qualquer que seja $(\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n$? Justifique sua resposta.

Em (*i*) e (*ii*), use indução em n. **{*Data de entrega*: 8/9/2022}**

E12 Considere a seguinte sessão interativa de Python:

```
$ python
Python 3.9.13 (main, May 21 2022, 10:37:33)
[Clang 13.0.0 (clang-1300.0.29.30)] on darwin
Type "help", "copyright", "credits" or "license" for more information.
>>> D = {'A', 'B', 'C', 'D'}
>>> from vec import Vec
>>> a = Vec(D, {'B': 1, 'D': 5})
>>> b = Vec(D, {'A': -2, 'B': 1, 'C': 4, 'D': .5})
>>> c = Vec(D, {'B': 2})
>>> d = Vec(D, {'A': 2, 'B': 3, 'D':3})
>>> from vecutil import list2vec
```

```
>>> from triangular import triangular_solve
```

Queremos agora executar o comando

```
>>> x = triangular_solve([X, X, X, X], [Y, Y, Y, Y], list2vec([Z, Z, Z, Z]))
```

para resolver o sistema de 4 equações lineares

$$\begin{cases} \mathbf{a}\cdot\mathbf{x} = 3 \\ \mathbf{b}\cdot\mathbf{x} = 6 \\ \mathbf{c}\cdot\mathbf{x} = -8 \\ \mathbf{d}\cdot\mathbf{x} = -4. \end{cases}$$

Neste exercício, você deve dizer o que devem ser as listas `[X, X, X, X]`, `[Y, Y, Y, Y]` e `[Z, Z, Z, Z]` na chamada de `triangular_solve()` acima. Diga brevemente como você chegou a sua resposta. **{*Data de entrega*: 8/9/2022}**

E13 Suponha que executamos uma sessão interativa do Python idêntica à sessão do Exercício **E12**, exceto pelo fato de definirmos `d` da seguinte forma:

```
>>> d = Vec(D, {'A': 2, 'B': 3, 'C': -1, 'D':3})
```

Queremos novamente resolver o sistema linear do Exercício **E12** fazendo uma chamada do procedimento `triangular_solve()` da forma

```
>>> x = triangular_solve([X, X, X, X], [Y, Y, Y, Y], list2vec([Z, Z, Z, Z]))
```

Isso é possível fazer? Justifique sua resposta.

E14 A *diferença simétrica* $A \triangle B$ dos conjuntos A e B é o conjunto $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Prove que a operação de diferença simétrica é associativa, isto é, que $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$ para quaisquer conjuntos A, B e C. [*Sugestão.* Seja U um conjunto tal que $A \cup B \subset U$, e considere as funções características $\mathbb{1}_A$ e $\mathbb{1}_B$ de A e B como vetores em $\mathrm{GF}(2)^U$ (lembre-se do Exercício **E4**). O que é o vetor $\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B \in \mathrm{GF}(2)^U$?] **{*Data de entrega*: 8/9/2022}**

E15 (M) Leia a definição (abstrata) de espaços vetoriais na Wikipedia. Considere o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$, com as operações usuais de soma e produto. Verifique que $\mathbb{R}$ é então um espaço vetorial sobre o corpo dos números racionais $\mathbb{Q}$.

E16 Leia o Exemplo 3.4.13 de **PNK**.

E17 Faça o Problema 3.8.3 de **PNK**. Note que, com os vetores 011 e 101 de entrada, sua função deve devolver uma lista com os 4 elementos 000, 011, 101 e 110 (a ordem pode ser qualquer). Ademais, com a lista vazia de vetores de entrada, sua função deve devolver o vetor nulo de $\mathrm{GF}(2)^D$. **{*Data de entrega*: 15/9/2022}**

E18 Faça os Problemas 3.8.7 e 3.8.8 de **PNK**. Lembre que um espaço vetorial é um conjunto de vetores que satisfaz as Propriedades V1, V2 e V3 (veja a Definição 3.4.1 em **PNK**).

E19 Faça o Problema 3.8.10 de **PNK**. **{*Data de entrega*: 15/9/2022}**

E20 Faça o Problema 4.17.12 de **PNK**.

E21 Leia o Exemplo 4.6.4 de **PNK**.

E22 Um *grafo* G é um par ordenado (V, E), onde

$$E \subset \binom{V}{2} = \{e \subset V : |e| = 2\}. \tag{3}$$

Isto é, os elementos de E são da forma $\{x, y\}$ com x e y elementos distintos de V. Os elementos de V são os *vértices* de G e os de E são as *arestas* de G. Se $e = \{x, y\}$ é uma aresta, então e tem *extremos* ou *pontas* x e y e e *liga* x a y. Você pode ler um pouco sobre grafos na Wikipedia. O grafo ilustrado na primeira figura naquela página da Wikipedia é o grafo (V, E) com $V = \{1, \dots, 6\}$ e

$$E = \big\{\{1,2\}, \{2,3\}, \{3,4\}, \{4,5\}, \{5,1\}, \{2,5\}, \{4,6\}\big\}. \tag{4}$$

Para grafos pequenos, é usual especificar um desenho do grafo em vez dos conjuntos V e E, pois o desenho é mais simples de se entender. Desenhe todos os grafos com conjunto de vértices $V = \{1, 2, 3\}$ (são 8 grafos no total).

E23 (Continuação de **E22**) Às vezes, é útil permitir "arestas múltiplas" ou "arestas paralelas" em grafos: isto é, queremos mais de uma aresta ligando um par de vértices. Às vezes, é também útil permitir arestas que ligam um vértice a si próprio (tais arestas são chamadas de *laços*). Em tais contextos, trabalhamos com "multigrafos". Um *multigrafo* G é uma tripla (V, E, φ), onde V e E são conjuntos e $\varphi\colon E \to \binom{V}{2} \cup V$ é o que chamamos de *função de incidência* de G. Se $\varphi(e) = \{x, y\} \in \binom{V}{2}$, então a aresta e tem *extremos* x e y e ela *liga* x a y em G. Se $\varphi(e) = x \in V$, então a aresta e é um *laço*, que *liga* o vértice x consigo próprio. O multigrafo na Seção 4.11.2 de **PNK** (veja o segundo desenho desse multigrafo, em que as arestas estão rotuladas) é o multigrafo (V, E, φ), onde $V = \{1, 2, 3, 4\}$, $E = \{a, b, c, d, e\}$ e $\varphi(a) = \{1, 2\}$, $\varphi(b) = \varphi(c) = \{2, 3\}$, $\varphi(d) = \{1, 4\}$ e $\varphi(e) = \{2, 4\}$.

- (*i*) No multigrafo da Seção 4.11.2 de **PNK**, quantos passeios há do vértice 3 para o vértice 2 de comprimento 4? E de comprimento 32? (Como você pode ler naquela seção, há 12 deles de comprimento 3.)
- (*ii*) No grafo do Exercício **E22** (com conjunto de arestas (4)), quantos passeios há do vértice 1 ao vértice 6 de comprimento 32?

Em ambos os casos, diga como você chegou às respostas. **{*Data de entrega*: 22/9/2022}**

E24 Seja $G = (V, E)$ um grafo. Dizemos que $F \subset E$ é um *ciclo* se todo vértice x de G é ponta de um número par de arestas em F, isto é, há um número par de $e \in F$ tal que $x \in e$. O *espaço de ciclos* de G é

$$\mathcal{C} = \{F \subset E \colon F \text{ é um ciclo em } G\}. \tag{5}$$

Seja M a *matriz de incidência* de G: a matriz em $\mathrm{GF}(2)^{V \times E}$ que tem como sua e-ésima coluna ($e \in E$) a função característica $\mathbb{1}_e \in \mathrm{GF}(2)^V$ de e (veja o Exercício **E4**). Prove que $\mathcal{C} = \{F \subset E \colon \mathbb{1}_F \in \operatorname{Null} M\}$. [*Observação.* Lembre que, dada uma matriz $A \in \mathbb{F}^{R \times C}$, pomos

$$\operatorname{Null} A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{F}^C \colon A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}. \tag{6}$$

Chamamos $\operatorname{Null} A$ de *núcleo* de A. Você pode ler sobre núcleos de matrizes na Seção 4.7 de **PNK** (nesse exercício, você só precisa saber a definição (6) acima). Note que $\operatorname{Null} A$ nada mais é que o conjunto de soluções do sistema de equações lineares homogêneas "codificado" por $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Finalmente, é importante que, neste exercício, $\mathbb{F} = \mathrm{GF}(2)$.] **{*Data de entrega*: 22/9/2022}**

E25 Seja $G = (V, E)$ um grafo e seja $M \in \mathrm{GF}(2)^{V \times E}$ sua matriz de incidência (veja Exercício **E24**). Caracterize os grafos G tais que $\operatorname{Null} M = \{\mathbf{0}\}$. Prove que sua caracterização está correta. [*Sugestão.* Um *circuito* em um grafo é uma sequência de vértices e arestas

$$v_0, e_1, v_1, \ldots, e_\ell, v_\ell \tag{7}$$

do grafo com $\ell > 0$ e tal que (a) $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$ para todo $1 \le i \le \ell$, (b) os vértices $v_0, v_1, \ldots, v_{\ell-1}$ são todos distintos e (c) $v_\ell = v_0$. O que ocorre se G contém um circuito?]

E26 Seja $G = (V, E)$ um grafo e $F \subset E$ um ciclo de G (veja Exercício **E24**). Prove que existem circuitos $C_1, \ldots, C_t$ $(t \ge 0)$ tais que

(i) os C_i $(1 \le i \le t)$ dois a dois não têm arestas em comum e

(ii) $F = E(C_1) \cup \cdots \cup E(C_t)$, onde $E(C_i)$ denota o conjunto de arestas que ocorrem em C_i.

(iii) Conclua que $\mathbb{1}_F = \sum_{1 \le i \le t} \mathbb{1}_{C_i}$.

E27 Seja $G = (V, E)$ um grafo. Assim como no Exercício **E24**, trabalhamos neste exercício sobre $\mathrm{GF}(2)$. O *espaço dos cociclos* de G é

$$\mathcal{C}^\perp = \{B \subset E \colon \mathbb{1}_B^\top \mathbb{1}_C = 0 \text{ para todo ciclo } C \text{ de } G\}. \tag{8}$$

Seja agora $U \subset V$ e seja

$$B_U = \{e \in E \colon e \text{ tem uma ponta em } U \text{ e a outra ponta em } V \setminus U\}. \tag{9}$$

Prove que B_U é um cociclo de G para qualquer $U \subset V$.

E28 Seja $G = (V, E)$ um grafo. Neste exercício, vamos dizer que $F \subset E$ é *ímpar-regular* se todo vértice x de G é ponta de um número ímpar de arestas em F, isto é, há um número ímpar de $e \in F$ tal que $x \in e$.

(i) Seja G o grafo exemplo na página da Wikipedia, com conjunto de arestas (4). Encontre um conjunto ímpar-regular de arestas em G.

(ii) Seja $M \in \mathrm{GF}(2)^{V \times E}$ a matriz de incidência de G. Prove que $F \subset E$ é ímpar-regular se e só se $M\mathbb{1}_F = \mathbb{1}_V$.

(iii) Suponha agora que G seja o grafo de Petersen (veja, por exemplo, essa página). Encontre um conjunto ímpar-regular de arestas em G ou prove que não existe tal conjunto. [*Sugestão.* Multiplique os dois lados de $M\mathbb{1}_F = \mathbb{1}_V$ por $\mathbb{1}_V^\top$. Não se esqueça que estamos trabalhando sobre $\mathrm{GF}(2)$].

E29 Leia sobre *Lights Out* nessa página. Você pode jogar a versão 5×5 do Lights Out, por exemplo, nessa página. Leia agora o Exemplo 4.5.12 de **PNK**. Em particular, experimente executar o procedimento `button_vectors()` para valores pequenos de n para conferir que os vetores gerados correspondem realmente aos botões do jogo. Use o procedimento que você escreveu no Exercício **E17** para decidir se todas as configurações iniciais têm solução para $n = 2$, 3 e 4. Explique como você chegou a suas respostas. **{*Data de entrega:* 29/9/2022}**

E30 Leia o Exemplo 4.5.16 de **PNK**. Note que, para o uso de `solve` do módulo `solver.py`, você terá de usar Python $3.x$ com $x \in \{4, 5, 6\}$. Visite esta página e resolva a instância de Lights Out dada por ela usando o procedimento dado no Exemplo 4.5.16.

E31 (Continuação de **E30**) O Exemplo 4.5.16 de **PNK** descreve como resolver o Lights Out em uma sessão interativa do Python. Naturalmente, você pode escrever um programa para automatizar o processo. Escreva um programa Python, chamado `lo_solver.py`, que segue as seguintes especificações:

- ▷ *Entrada*: um inteiro N na linha de comando e pares de inteiros na entrada padrão especificando quais lâmpadas de uma instância $N \times N$ do Lights Out estão acesas;
- ▷ *Saída* (na saída padrão): pares de inteiros especificando quais botões devem ser pressionados para se resolver a instância dada.

Seu programa deve comportar-se como você pode ver no exemplo nesse diretório.

E32 (Continuação de **E30**) Se você fosse pôr no ar uma página como essa, não seria muito bom se você permitisse que a página gerasse instâncias que não admitem solução. Diga como você pode gerar instâncias que sempre têm solução, usando a rotina `button_vectors()` do Exemplo 4.5.12 de **PNK**.

E33 Sejam U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{F}$ e seja $f\colon U \to V$ uma função linear. Suponha que f seja inversível e seja $g = f^{-1}\colon V \to U$ sua inversa. Prove que g é uma função linear. ***{Data de entrega: 29/9/2022}***

E34 Prove ou dê contraexemplos:

(*i*) Sejam $g\colon X \to Y$ e $f\colon Y \to Z$ funções tais que $f \circ g$ é inversível. Então tanto f quanto g são inversíveis.

(*ii*) Sejam $A \in \mathbb{F}^{R\times C}$ e $B \in \mathbb{F}^{C\times D}$ matrizes tais que o produto $AB \in \mathbb{F}^{R\times D}$ é inversível. Então tanto A quanto B são inversíveis.

(*iii*) Sejam $A \in \mathbb{F}^{R\times C}$ e $B \in \mathbb{F}^{C\times R}$ matrizes. Sejam I_R a matriz identidade em $\mathbb{F}^{R\times R}$ e I_C a matriz identidade em $\mathbb{F}^{C\times C}$. Se $AB = I_R$ então A é inversível e $A^{-1} = B$.

(*iv*) Sejam A, B, I_R e I_C como em (*iii*) acima. Se $BA = I_C$, então A é inversível e $A^{-1} = B$.

{Data de entrega: 6/10/2022}

E35 Leia a Seção 4.14 de **PNK** (partes iniciais). Lembre que o código de Hamming que vimos em sala é, por definição, o conjunto $\operatorname{Null} H = \operatorname{Ker} f_H$, onde

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{10}$$

e $f_H\colon \mathrm{GF}(2)^7 \to \mathrm{GF}(2)^3$ é função que leva $\mathbf{v} \in \mathrm{GF}(2)^7$ em $H\mathbf{v} \in \mathrm{GF}(2)^3$ (veja Seção 4.7.5 de **PNK**). Seja G a matriz dada na Seção 4.14.3 de **PNK**. Sejam $G_{*1}, \dots, G_{*4}$ as quatro colunas de G, de forma que $G = [G_{*1} \mid \cdots \mid G_{*4}]$. O espaço das colunas de G é, por definição, $\operatorname{Span}\{G_{*1}, \dots, G_{*4}\} \subset \mathrm{GF}(2)^7$. Prove que o espaço das colunas de G coincide com o código de Hamming, isto é, prove que

$$\operatorname{Null} H = \operatorname{Span}\{G_{*1}, \dots, G_{*4}\}. \tag{11}$$

[*Sugestão.* É fácil verificar que $\operatorname{Null} H \supset \operatorname{Span}\{G_{*1}, \dots, G_{*4}\}$. Para verificar a outra direção, considere um elemento $[c_1 \cdots c_7]^\top \in \operatorname{Null} H$. Considere $G\mathbf{w}$, onde $\mathbf{w} = [c_7\ c_6\ c_5\ c_3]^\top$.] ***{Data de entrega: 6/10/2022}***

E36 Seja $G = (V, E)$ um grafo e x e y dois vértices em G. Seja $F \subset E$ um subconjunto de arestas de G. Suponha que

$$\sum_{f\in F} \mathbb{1}_f = \mathbb{1}_{\{x,y\}}, \tag{12}$$

onde estamos trabalhando em $\mathrm{GF}(2)$. Isto é, as funções características $\mathbb{1}_f \in \mathrm{GF}(2)^V$ das arestas f em F somam a função característica $\mathbb{1}_{\{x,y\}} \in \mathrm{GF}(2)^V$ de $\{x, y\}$.

(i) Verifique que (12) é equivalente a dizer que $M\mathbb{1}_F = \mathbb{1}_{\{x,y\}}$, onde M é a matriz de incidência de G (veja o Exercício **E24**).

(ii) É verdade que (12) implica que F é o conjunto de arestas de um (x, y)-caminho em G? Lembre que um (x, y)-*caminho* é um caminho que começa em x e termina em y.

(iii) Considere o grafo $H = (V, F)$, que tem o mesmo conjunto de vértices que G, mas tem como conjunto de arestas o conjunto F. Deduza de (12) que existe um (x, y)-caminho em H.

E37 Seja $G = (V, E)$ um grafo. Lembre que $F \subset E$ é aresta-gerador se para toda aresta $\{x, y\} \in E$, existe um (x, y)-caminho em G que usa somente arestas em F. Considere as funções características $\mathbb{1}_e \in \mathrm{GF}(2)^V$ $(e \in E)$ das arestas de G. Prove que $F \subset E$ é aresta-gerador se e só se

$$\mathrm{Span}\{\mathbb{1}_f : f \in F\} = \mathrm{Span}\{\mathbb{1}_e : e \in E\}. \tag{13}$$

[*Observação.* O espaço no lado direito de (13) é às vezes conhecido como o *espaço das arestas de* G e é denotado $C_1(G)$]

E38 Verifique os seguintes fatos.

(i) Seja $A \in \mathbb{F}^{R\times C}$ uma matriz e $\{C_1, C_2\}$ uma partição de C, isto é, $C = C_1 \cup C_2$, $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ e $C_1 \neq \emptyset$ e $C_2 \neq \emptyset$. Sejam $A_1 \in \mathbb{F}^{R\times C_1}$ e $A_2 \in \mathbb{F}^{R\times C_2}$ as matrizes naturalmente definidas por A por restrição (por exemplo, $A_1(r, c) = A(r, c)$ para todo $(r, c) \in R \times C_1$). Seja $\mathbf{v} \in \mathbb{F}^C$ e defina $\mathbf{v}_1 \in \mathbb{F}^{C_1}$ e $\mathbf{v}_2 \in \mathbb{F}^{C_2}$ de forma análoga. Prove que $A\mathbf{v} = A_1\mathbf{v}_1 + A_2\mathbf{v}_2$. Uma forma intuitiva de se entender esse fato é escrever algo como

$$A\mathbf{v} = \left[A_1 \,\middle|\, A_2\right] \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \hline \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} = A_1\mathbf{v}_1 + A_2\mathbf{v}_2 \tag{14}$$

ou simplesmente

$$A\mathbf{v} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} = A_1\mathbf{v}_1 + A_2\mathbf{v}_2 \tag{15}$$

(ii) Sejam A, $\mathbf{v}$, C_1 e C_2, A_1 e A_2 e $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ como acima. Suponha agora que $\{R_1, R_2\}$ seja uma partição de R. Sejam $A_{ij} \in \mathbb{F}^{R_i\times C_j}$ para todo i e j definidos por restrição de A. Prove que $A\mathbf{v} = \mathbf{u}_1 \cup \mathbf{u}_2$, onde $\mathbf{u}_1 = A_{11}\mathbf{v}_1 + A_{12}\mathbf{v}_2$, $\mathbf{u}_2 = A_{21}\mathbf{v}_1 + A_{22}\mathbf{v}_2$ e você precisa encontrar a interpretação correta para a união $\mathbf{u}_1 \cup \mathbf{u}_2$. Uma forma intuitiva de se entender esse fato é escrever algo como

$$A\mathbf{v} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}\mathbf{v}_1 + A_{12}\mathbf{v}_2 \\ A_{21}\mathbf{v}_1 + A_{22}\mathbf{v}_2 \end{bmatrix}. \tag{16}$$

(iii) Nos itens anteriores, podemos substituir $\mathbf{v}$ por uma matriz $B \in \mathbb{F}^{C\times D}$ e considerar uma partição $\{D_1, D_2\}$ de D. Interprete adequadamente e verifique a identidade

$$AB = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix}. \tag{17}$$

E39 Como de usual, sejam R e C conjuntos de índices que indexam as linhas e colunas de matrizes. Suponha que $R \subset C$ e seja $C' = C \setminus R$ de forma que $C = R \cup C'$. Seja $H \in \mathbb{F}^{R\times C}$ com o seguinte formato especial: $H_1 \in \mathbb{F}^{R\times R}$ obtido por restrição de H é a matriz identidade $I_R \in \mathbb{F}^{R\times R}$. Intuitivamente,

$$H = \begin{bmatrix} I_R & M \end{bmatrix} \tag{18}$$

onde M é uma matriz em $\mathbb{F}^{R\times C'} = \mathbb{F}^{R\times (C\setminus R)}$. Seja

$$G = \begin{bmatrix} -M \\ I_{C'} \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{C\times C'}, \tag{19}$$

onde $I_{C'} \in \mathbb{F}^{C'\times C'}$ é a matriz identidade.

(*i*) Calcule HG.

(*ii*) Prove que

$$\operatorname{Null} H = \operatorname{Span}\{G_{*c} \colon c \in C'\}, \tag{20}$$

onde $G_{*c} \in \mathbb{F}^C$ é a c-ésima coluna de G para todo $c \in C'$.

(*iii*) Seja

$$H = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 0&0&0&1&1&1&1&0&0&0&0&1&1&1&1 \\ 0&1&1&0&0&1&1&0&0&1&1&0&0&1&1 \\ 1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1 \end{bmatrix} \in \mathrm{GF}(2)^{4\times 15} \tag{21}$$

Encontre uma matriz G tal que $\operatorname{Null} H$ é o espaço gerado pelas colunas de G. [*Observação.* Tal matriz G é meio grande, mas ela não é muito densa e com um pouco de paciência você consegue escrevê-la explicitamente.]

{*Data de entrega*: 13/10/2022}

E40 Sejam $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{F}^m$ vetores e seja $M = [\mathbf{v}_1 \mid \cdots \mid \mathbf{v}_n] \in \mathbb{F}^{m\times n}$ a matriz cujas colunas são os $\mathbf{v}_i$. Suponha que exista uma matriz $N \in \mathbb{F}^{n\times m}$ tal que $NM = I_n$, onde $I_n \in \mathbb{F}^{n\times n}$ é a matriz identidade $n \times n$. Prove que os $\mathbf{v}_i$ $(1 \le i \le n)$ são linearmente independentes.

E41 Fixe um inteiro $n \ge 3$ e seja $R = \{1, \dots, n\}$. Para todo $1 \le i < n$, seja $\mathbf{f}_i = \mathbb{1}_{\{i,i+1\}}$, e seja $\mathbf{f}_n = \mathbb{1}_{\{1,n\}}$ (isto é, estamos considerando as funções características dos conjuntos $\{1,2\}$, $\{2,3\}$, …, $\{n-1,n\}$ e $\{n,1\}$).

(*i*) Suponha que estamos trabalhando sobre $\mathrm{GF}(2)$. Mostre que os vetores $\mathbf{f}_i$ $(1 \le i \le n)$ são linearmente dependentes sobre $\mathrm{GF}(2)$.

(*ii*) Suponha agora que n seja par e que estamos agora trabalhando sobre os números reais $\mathbb{R}$. Mostre que os vetores $\mathbf{f}_i$ $(1 \le i \le n)$ são linearmente dependentes sobre $\mathbb{R}$.

(*iii*) Suponha agora que n seja ímpar. Mostre que os vetores $\mathbf{f}_i$ $(1 \le i \le n)$ são linearmente independentes sobre $\mathbb{R}$. [*Sugestão.* Observe, por exemplo, que

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 2I_3 \tag{22}$$

e

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 2I_5. \tag{23}$$

Generalize e use o resultado do Exercício **E40**.]

{*Data de entrega*: 13/10/2022}

E42 (M) Lembre que $\mathbb{R}$ é um espaço vetorial sobre o corpo dos números racionais $\mathbb{Q}$ (veja o Exercício **E15**). Prove que $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ são linearmente independentes sobre $\mathbb{Q}$. Generalize (você pode considerar valores diferentes de 2 e 3 e pode também considerar mais de dois valores).

E43 (i) Encontre dois vetores em $\mathbb{C}^2$ que são linearmente independentes sobre $\mathbb{R}$, mas que são linearmente dependentes sobre $\mathbb{C}$.

(ii) Sejam $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ vetores em $\mathbb{R}^N$ que são linearmente independentes sobre $\mathbb{R}$. Prove que eles são linearmente independentes sobre $\mathbb{C}$.

E44 Senhor Cético não acredita que *Lights Out* no tabuleiro 20×20 sempre tem solução. Como você pode convencê-lo desse fato? Sr. C está disposto a verificar soluções de instâncias específicas de *Lights Out* (ele tem um programa que verifica a correção de soluções apresentadas a ele), mas não está disposto a muito mais que isso. Por outro lado, Sr. C tem acesso a um gerador de bits aleatórios e ele acredita que eventos com probabilidade menor ou igual a $1/2^{70} \approx 10^{-21}$ não acontecem (a idade do universo é algo como 5×10^{17} segundos).

E45 Seja X um conjunto finito.

(i) Suponha que $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ seja uma família de subconjuntos de X tal que (a) $|F|$ é ímpar para todo $F \in \mathcal{F}$ e (b) $|F \cap F'|$ é par para quaisquer dois F e F' membros distintos de $\mathcal{F}$. Prove que $\mathcal{F}$ tem no máximo $|X|$ membros. [*Sugestão.* Considere as funções características $\mathbb{1}_F \in \mathrm{GF}(2)^X$ dos membros de $\mathcal{F}$.]

(ii) Encontre uma família $\mathcal{F}$ como em (i) acima com $|\mathcal{F}| = |X|$.

(iii) Encontre uma família $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ tal que $|F \cap F'|$ é par para quaisquer dois F e F' membros de $\mathcal{F}$ com $|\mathcal{F}| \geq 2^{\lfloor |X|/2 \rfloor}$.

E46 Seja p um primo e X um conjunto finito.

(i) Suponha que $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ seja uma família de subconjuntos de X tal que (a) $|F| \not\equiv 0 \pmod{p}$ para todo $F \in \mathcal{F}$ e (b) $|F \cap F'| \equiv 0 \pmod{p}$ para quaisquer dois F e F' membros distintos de $\mathcal{F}$. Prove que $\mathcal{F}$ tem no máximo $|X|$ membros.

(ii) Encontre uma família $\mathcal{F}$ como em (i) acima com $|\mathcal{F}| = |X|$.

(iii) Encontre uma família $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ tal que $|F \cap F'| \equiv 0 \pmod{p}$ para quaisquer dois F e F' membros de $\mathcal{F}$ com $|\mathcal{F}| \geq 2^{\lfloor |X|/p \rfloor}$.

E47 Seja V um espaço vetorial. Prove que valem as seguintes afirmações:

(i) Seja $S \subset V$ um conjunto *gerador minimal*, isto é, tal que $\operatorname{Span} S = V$, mas tal que, para todo $S' \subset S$ com $S' \neq S$, vale que $\operatorname{Span} S' \neq V$. Prove que S é uma base de V.

(ii) Seja $S \subset V$ um conjunto *linearmente independente maximal*, isto é, tal que S é linearmente independente, mas tal que, para todo $S' \subset V$ com $S \subset S'$ e $S \neq S'$, vale que S' não é linearmente independente. Prove que S é uma base de V.

{*Data de entrega*: 20/10/2022}

E48 Dizemos que um grafo G é uma *árvore* se ele for *acíclico* (não contém circuitos) e *conexo* (para quaisquer dois vértices x e y em G, há um (x, y)-caminho em G). Prove que as seguintes asserções são equivalentes para um grafo $G = (V, E)$:

(i) G é uma árvore.

(ii) (Unicidade dos caminhos) Para quaisquer vértices x e y de G, existe um único (x, y)-caminho em G.

(iii) (Minimalmente conexo) G é conexo, e a remoção de qualquer aresta de G resulta em um grafo desconexo, isto é, $(V, E \setminus \{e\})$ é desconexo para qualquer $e \in E$.

(iv) (Maximalmente acíclico) G não contém circuitos, mas a adição de qualquer nova aresta $f \subset V$ a G resulta em um grafo que contém um circuito, isto é, $(V, E \cup \{f\})$ contém um circuito para qualquer $f \in \binom{V}{2} \setminus E$.

(v) G é conexo e $|E| = |V| - 1$.

E49 Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo, isto é, tal que para todo x e $y \in V$, existe um (x, y)-caminho em G. Lembre que o *espaço das arestas* de G é

$$C_1(G) = \mathrm{Span}\{\mathbb{1}_e : e \in E\} \subset \mathrm{GF}(2)^V. \tag{24}$$

Note que aqui estamos trabalhando sobre GF(2).

(i) Prove que

$$C_1(G) = \mathrm{Span}\left\{\mathbb{1}_{\{x,y\}} : x,\, y \in V \text{ e } x \neq y\right\}. \tag{25}$$

(ii) Prove que $F \subset E$ é tal que $\mathrm{Span}\{\mathbb{1}_f : f \in F\} = C_1(G)$ se e só se o grafo (V, F) é conexo.

(iii) Prove que $F \subset E$ é tal que os vetores $\mathbb{1}_f$ $(f \in F)$ são linearmente independentes se e só se o grafo (V, F) é acíclico.

(iv) Deduza que $\mathbb{1}_f$ $(f \in F)$ formam uma base de $C_1(G)$ se e só se F é tal que (V, F) é uma árvore.

(v) Prove que a dimensão de $C_1(G)$ é $n - 1$, onde n é o número de vértices em G.

(vi) Qual é a dimensão de $C_1(G)$ quando G tem k componentes conexas? (G tem k componentes conexas se G é a união disjunta de k grafos conexos.)

[*Sugestão*. Revise o Exercício **E36**.]

E50 Sejam $A \in \mathbb{F}^{P \times Q}$ e $B \in \mathbb{F}^{R \times S}$ duas matrizes. Definimos a matriz $A \otimes B \in \mathbb{F}^{(P \times R) \times (Q \times S)}$ como a matriz com entradas

$$(A \otimes B)\big((p, r), (q, s)\big) = A(p, q)B(r, s) \tag{26}$$

para todo $\big((p, r), (q, s)\big) \in (P \times Q) \times (R \times S)$. Mais intuitivamente, suponha que

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}. \tag{27}$$

Então

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \dots & a_{mn}B \end{bmatrix}. \tag{28}$$

Sejam agora $H_1, H_2, \ldots$ matrizes com entradas em $\{-1, 1\}$ dadas por

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{29}$$

e, para todo $n \geq 2$,

$$H_n = H_1 \otimes H_{n-1}. \tag{30}$$

(*i*) Calcule H_2 e H_3.

(*ii*) Quantas linhas e quantas colunas tem H_n?

(*iii*) Calcule H_n^2 para todo n.

E51 Considere as matrizes H_n ($n \geq 1$) do Exercício **E50**. Sejam $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_N \in \{-1, 1\}^N$ as N colunas de H_n, de forma que

$$H_n = [\mathbf{v}_1 \mid \cdots \mid \mathbf{v}_N]. \tag{31}$$

Prove que os $\mathbf{v}_i$ ($1 \leq i \leq N$) formam uma base de $\mathbb{F}^N$ para $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ e $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, isto é, prove que eles geram $\mathbb{F}^N$ e que eles são linearmente independentes sobre $\mathbb{F}$. Esses vetores são uma base de $\mathrm{GF}(2)^N$? **{*Data de entrega*: 20/10/2022}**

E52 Responda e justifique:

(*i*) Qual é a dimensão do espaço vetorial das matrizes $\{M\colon M \in \mathbb{F}^{R\times C}\}$ sobre $\mathbb{F}$?

(*ii*) Qual é a dimensão do espaço vetorial das *matrizes simétricas*

$$\{M\colon M \in \mathbb{F}^{S\times S} \text{ tal que } M = M^\top\} \tag{32}$$

sobre $\mathbb{F}$?

(*iii*) Qual é a dimensão do espaço vetorial das *matrizes antissimétricas*

$$\{M\colon M \in \mathbb{F}^{S\times S} \text{ tal que } M = -M^\top\} \tag{33}$$

sobre $\mathbb{F}$?

E53 (M) Considere $\mathbb{R}$ como um espaço vetorial sobre $\mathbb{Q}$. Prove que a dimensão desse espaço é infinito. Prove que essa dimensão não é nem enumerável.

E54 (*i*) Prove que, para todo inteiro $n \geq 0$, temos

$$\sum_{0\leq i<n} x^i = \frac{1-x^n}{1-x}. \tag{34}$$

(*ii*) Fixe $n \geq 1$ e seja $\omega = \mathrm{e}^{2\pi\mathbf{i}/n}$, onde $\mathbf{i} = \sqrt{-1}$. Seja $S = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ e considere a matriz $F_n \in \mathbb{C}^{S\times S}$ tal que $F_n(i, j) = \omega^{ij}$ para todo i e j em S. Calcule F_2, F_3 e F_4 explicitamente.

(*iii*) Considere a matriz $G_n \in \mathbb{C}^{S\times S}$ tal que $G_n(i, j) = \omega^{-ij}$ para todo i e j em S. Calcule G_nF_n e F_nG_n para todo $n \geq 1$.

(*iv*) Sejam $\mathbf{v}_0, \ldots, \mathbf{v}_{n-1} \in \mathbb{C}^S$ as n colunas de F_n, de forma que

$$F_n = [\mathbf{v}_0 \mid \cdots \mid \mathbf{v}_{n-1}]. \tag{35}$$

Prove que os $\mathbf{v}_i$ ($0 \leq i < n$) formam uma base de $\mathbb{C}^S$. Prove o mesmo para as colunas de G_n.

{*Data de entrega*: 27/10/2022}

E55 Sejam V e W espaços vetoriais sobre $\mathbb{F}$. Seja $S = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ um conjunto de n vetores linearmente independentes de V e seja $\varphi\colon S \to W$ uma função qualquer.

(i) Prove que existe uma função linear $f\colon \operatorname{Span} S \to W$ tal que $f(\mathbf{v}_i) = \varphi(\mathbf{v}_i)$ para todo $1 \le i \le n$.

(ii) Prove que f como em (i) acima é única.

{*Data de entrega*: 3/11/2022}

E56 Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo. Suponha que as arestas de conjunto $F \subset E$ *formem uma árvore geradora* de G, isto é, que F seja tal que (V, F) é uma árvore (veja os Exercícios **E48** e **E49**). Seja $A \subset E$ um conjunto acíclico (isto é, tal que (V, A) não contém circuitos). Prove que existe $F' \subset F$ tal que as arestas em $A \cup F'$ formam uma árvore geradora de G.

E57 Seja S um conjunto de vetores de $\mathbb{F}^D$ com D finito. Definimos o *posto* de S como sendo $\dim \operatorname{Span} S$. Prove que o posto de S é

$$\max\{|T| \colon T \subset S \text{ com } T \text{ linearmente independente}\}. \tag{36}$$

E58 Denotemos o posto de uma matriz M por $\operatorname{posto} M$.

(i) Sejam $A \in \mathbb{F}^{R\times S}$ e $B \in \mathbb{F}^{S\times T}$ matrizes. Prove que

$$\operatorname{posto}(AB) \le \min\{\operatorname{posto} A, \operatorname{posto} B\}. \tag{37}$$

(ii) Suponha que $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ e $B \in \mathbb{F}^{n\times m}$ são tais $AB = I_m$ e $BA = I_n$, onde I_m e I_n são as matrizes identidade. Prove que $m = n$.

(iii) Suponha que $M \in \mathbb{F}^{m\times n}$ seja inversível. Prove que $m = n$.

{*Data de entrega*: 3/11/2022}

E59 Seja $I_n \in \mathbb{F}^{n\times n}$ a matriz identidade.

(i) Seja $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ uma matriz com $\operatorname{posto} A = n$. Prove que existe uma única matriz $Q \in \mathbb{F}^{n\times n}$ tal que $AQ = I_n$.

(ii) Seja $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ uma matriz com $\operatorname{posto} B = n$. Prove que existe uma única matriz $P \in \mathbb{F}^{n\times n}$ tal que $PB = I_n$.

(iii) Seja $M \in \mathbb{F}^{n\times n}$ uma matriz com $\operatorname{posto} M = n$. Prove que existe uma única matriz $N \in \mathbb{F}^{n\times n}$ tal que $NM = MN = I_n$.

{*Data de entrega*: 3/11/2022}

E60 (M) Lembre que $\mathbb{R}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{Q}$ (veja o Exercício **E15**). Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função linear, com $\mathbb{R}$ sendo considerado como um espaço vetorial sobre $\mathbb{Q}$ (isto é, f preserva somas e f é $\mathbb{Q}$-linear: $f(\alpha r) = \alpha f(r)$ para todo $\alpha \in \mathbb{Q}$ e $r \in \mathbb{R}$). É verdade que f é contínua? É verdade que f é contínua em $0 \in \mathbb{R}$?

E61 Suponha que sorteamos $\mathbf{a}_i \in \mathrm{GF}(2)^n$ uniformemente ao acaso para todo $1 \le i \le n$, independentemente. Prove que o valor esperado do posto da coleção de vetores $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ é maior que $n - 1$.

E62 Sejam U e W subespaços complementares em V, de forma que $V = U \oplus W$. Prove que, para todo $\mathbf{v} \in V$, existem $\mathbf{u} \in U$ e $\mathbf{w} \in W$ tais que $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$ e que esses vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{w}$ são únicos.

E63 Sejam U e V espaços vetoriais e seja $f\colon U \to V$ uma função linear. Vimos que existe um subespaço U^* de U tal que $U = U^* \oplus \operatorname{Ker} f$. Tal subespaço U^* é sempre único? Pode existir um subespaço U^{**} tal que $U = U^{**} \oplus \operatorname{Ker} f$ e $\dim U^{**} \neq \dim U^*$? **{*Data de entrega*: 10/11/2022}**

E64 Sejam U e V espaços vetoriais e seja $f\colon U \to V$ uma função linear. Seja $\sim$ a relação definida sobre U tal que, para quaisquer $\mathbf{u}$ e $\mathbf{u}'$ em U, temos $\mathbf{u} \sim \mathbf{u}'$ se e só se $\mathbf{u} - \mathbf{u}' \in \operatorname{Ker} f$. Prove que $\sim$ é uma relação de equivalência.

E65 (Continuação de **E64**) Para $\mathbf{u} \in U$, seja $[\mathbf{u}]$ a classe de equivalência de $\mathbf{u}$ relativa à relação $\sim$:

$$[\mathbf{u}] = \{\mathbf{u}' \in U\colon \mathbf{u}' \sim \mathbf{u}\}. \tag{38}$$

(*i*) Prove que, para todo $\mathbf{u} \in U$, temos

$$[\mathbf{u}] = \mathbf{u} + \operatorname{Ker} f. \tag{39}$$

(*ii*) Seja

$$U/{\sim} = \big\{[\mathbf{u}]\colon \mathbf{u} \in U\big\}. \tag{40}$$

Lembre que existe U^* subespaço de U tal que $U = U^* \oplus \operatorname{Ker} f$. Considere a função $\pi\colon U^* \to U/{\sim}$ tal que $\pi(\mathbf{u}) = [\mathbf{u}]$ para todo $\mathbf{u} \in U^*$. Prove que π é uma bijeção.

{*Data de entrega*: 10/11/2022}

E66 (Continuação de **E65**) Existe uma forma natural de se definir soma e produto por escalar em $U/{\sim}$ que tornam $U/{\sim}$ um espaço vetorial: $[\mathbf{u}] + [\mathbf{u}'] = [\mathbf{u} + \mathbf{u}']$ e $\alpha[\mathbf{u}] = [\alpha\mathbf{u}]$ para quaisquer $\mathbf{u}$ e $\mathbf{u}'$ em U e α escalar (é necessário verificar (exercício) que essas operações estão bem definidas, pois elas estão sendo definidas em termos de representantes de classe, e precisamos provar que estas definições não dependem dos representantes escolhidos). Prove que a função π do Exercício **E65** é linear. Conclua que a função

$$f^* \circ \pi^{-1}\colon U/{\sim} \to \operatorname{Im} f \tag{41}$$

é linear e bijetora. Aqui, $f^*\colon U^* \to \operatorname{Im} f$ é a função tal que $f^*(\mathbf{u}) = f(\mathbf{u})$ para todo $\mathbf{u} \in U^*$. [*Observação.* Este exercício diz que o espaço quociente $U/{\sim}$ é isomorfo ao espaço $\operatorname{Im} f$.]

E67 Lembre-se do Exercício **E45**. Seja X um conjunto finito, e suponha que $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ é tal que $|F \cap F'|$ é par para quaisquer dois F e F' membros de $\mathcal{F}$. Prove que $|\mathcal{F}| \leq 2^{\lfloor |X|/2 \rfloor}$. [*Sugestão.* Considere $U = \big\{\mathbb{1}_F \in \mathrm{GF}(2)^X\colon F \in \mathcal{F}\big\}$ e seu aniquilador U°.]

E68 Dadas uma matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e um vetor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, seja $\operatorname{Sol}(A, \mathbf{b}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\colon A\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$. Para cada uma das afirmações abaixo, prove a afirmação ou prove que não existem os objetos descritos.

(*i*) Exitem uma matriz escalonada $U \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ e $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ tais que $\operatorname{Sol}(U, \mathbf{b})$ é vazio.

(*ii*) Existem uma matriz escalonada $U \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ e $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ tais que $\operatorname{Sol}(U, \mathbf{b})$ tem exatamente um elemento.

(*iii*) Existem uma matriz escalonada $U \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ e $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ tais que $\operatorname{Sol}(U, \mathbf{b})$ tem infinitos elementos.

{*Data de entrega*: 1/12/2022}

E69 No que segue, escrevemos $[m]$ para o conjunto $\{1, 2, \ldots, m\}$ para qualquer inteiro m. Seja $\sigma\colon [m] \to [m]$ uma bijeção. Seja $P_\sigma = (a_{ij})$ a matriz $m \times m$ tal que, para todo $i \in [m]$,

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } j = \sigma(i) \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{42}$$

Seja $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ uma matriz.

(i) Descreva a matriz $P_\sigma A$ em termos das linhas de A. Isto é, pense em A da seguinte forma:

$$A = \begin{bmatrix} A_{1*} \\ A_{2*} \\ \vdots \\ A_{m*} \end{bmatrix}, \tag{43}$$

onde A_{i*} é a i-ésima linha de A, e descreva $P_\sigma A$ em termos dos A_{i*}.

(ii) Suponha agora que temos uma bijeção $\tau\colon [n] \to [n]$. Pensemos agora em A em termos de suas colunas:

$$A = \begin{bmatrix} A_{*1} & A_{*2} & \ldots & A_{*n} \end{bmatrix}, \tag{44}$$

onde A_{*j} é a j-ésima coluna de A. Defina uma matriz Q_τ parecida com a matriz P_σ acima de forma que

$$AQ_\tau = \begin{bmatrix} A_{*\tau(1)} & A_{*\tau(2)} & \ldots & A_{*\tau(n)} \end{bmatrix}. \tag{45}$$

E70 Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 0 & 5 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}, \tag{46}$$

que ocorre no Exemplo 7.3.3 de **PNK**.

(i) Continue o processo de escalonamento de A naquele exemplo, para obter a matriz escalonada

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 4 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1.75 & 10.5 \end{bmatrix}. \tag{47}$$

Descreva claramente os passos (adicionais) que você executou para completar esse escalonamento.

(ii) Encontre um matriz inversível M tal que $MA = U$.

(iii) Monte agora a matriz

$$A' = \begin{bmatrix} A & I \end{bmatrix}, \tag{48}$$

com 4 linhas e 9 colunas, onde I é a matriz identidade 4×4. Execute novamente os passos do processo de escalonamento que levam A a U, mas agora na matriz A' (por exemplo, o primeiro passo é multiplicar a segunda linha por -2 e somar o resultado à terceira linha; você deve executar exatamente o mesmo processo com a matriz 'estendida' A' no primeiro passo do processo). Ao terminar este processo, você terá uma matriz da forma

$$U' = \begin{bmatrix} U & B \end{bmatrix}, \tag{49}$$

onde B é uma certa matriz 4×4. É natural que a 'primeira parte' de U' seja U, pois executamos exatamente o mesmo processo de escalonamento. Entretanto, o que você obteve como B?

(*iv*) Explique por que o fato que você observou no item anterior não é coincidência, e de fato sempre ocorre. [*Observação.* Note que isto dá um bom algoritmo para se obter M.]

{*Data de entrega*: 1/12/2022}

E71 Seja $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ um vetor não-nulo. Para cada $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, sabemos que há uma decomposição da forma $\mathbf{b} = \mathbf{b}^{\|\mathbf{a}} + \mathbf{b}^{\perp\mathbf{a}}$ tal que $\mathbf{b}^{\|\mathbf{a}} \in \mathrm{Span}\{\mathbf{a}\}$ e $\langle \mathbf{b}^{\perp\mathbf{a}}, \mathbf{a}\rangle = 0$ e essa decomposição é única. Prove que a aplicação $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dada por $f(\mathbf{b}) = \mathbf{b}^{\|\mathbf{a}}$ para todo $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ é linear. [*Sugestão.* Considere a matriz $M = \|\mathbf{a}\|^{-2}\mathbf{a}\mathbf{a}^\top$. Note que M é uma matriz $n \times n$ (aqui seguimos a convenção que $\mathbf{a}$ é um vetor coluna). Calcule $M\mathbf{b}$.]

E72 Sejam $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ dois vetores em $\mathbb{R}^n$. Prove a *desigualdade de Cauchy e Schwarz*:

$$|\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle| \le \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|. \tag{50}$$

Prove que vale a igualdade em (50) somente quando $\mathbf{b}$ é múltiplo de $\mathbf{a}$ ou vice-versa. Deduza a *desigualdade triangular*:

$$\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| \le \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|. \tag{51}$$

Prove que vale a igualdade em (51) somente quando $\mathbf{b}$ é múltiplo de $\mathbf{a}$ ou vice-versa. [*Sugestão.* Para provar (50), deduza de $\mathbf{b} = \mathbf{b}^{\|\mathbf{a}} + \mathbf{b}^{\perp\mathbf{a}}$ que $\|\mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{b}^{\|\mathbf{a}}\|^2 + \|\mathbf{b}^{\perp\mathbf{a}}\|^2 \ge \|\mathbf{b}^{\|\mathbf{a}}\|^2$ e use esse fato. Para (51), comece lembrando que $\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|^2 = \langle \mathbf{a}+\mathbf{b}, \mathbf{a}+\mathbf{b}\rangle$.]

E73 Seja V um subespaço linear de $\mathbb{R}^n$ e seja $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Suponha que

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_1^{\|V} + \mathbf{b}_1^{\perp V} \tag{52}$$

e

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_2^{\|V} + \mathbf{b}_2^{\perp V}, \tag{53}$$

onde $\mathbf{b}_i^{\|V} \in V$ e $\mathbf{b}_i^{\perp V}$ é ortogonal a V, para $i \in \{1, 2\}$. Prove que $\mathbf{b}_1^{\|V} = \mathbf{b}_2^{\|V}$ e $\mathbf{b}_1^{\perp V} = \mathbf{b}_2^{\perp V}$. Em outras palavras, a decomposição de $\mathbf{b}$ como projeção ortogonal sobre V e projeção ortogonal a V é única.

E74 Sejam $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ vetores unitários mutualmente ortogonais. Seja $M = \sum_{1\le i\le k} \mathbf{v}\mathbf{v}^\top$. Note que M é uma matriz $n \times n$. Seja $V = \mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ e, para todo $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, considere a decomposição $\mathbf{b} = \mathbf{b}^{\|V} + \mathbf{b}^{\perp V}$ com $\mathbf{b}^{\|V} \in V$ e $\mathbf{b}^{\perp V}$ ortogonal a V. Prove que $M\mathbf{b} = \mathbf{b}^{\|V}$. **{*Data de entrega*: 10/12/2022}**

E75 Seja W um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$. Seja U um subespaço vetorial de W, e seja $U^\perp$ o complemento ortogonal de U, isto é,

$$U^\perp = \{\mathbf{w} \in W \colon \langle \mathbf{w}, \mathbf{u}\rangle = 0 \text{ para todo } \mathbf{u} \in U\}. \tag{54}$$

(*i*) Prove que $U \subset (U^\perp)^\perp$.

(*ii*) Prove que $\dim U + \dim U^\perp = \dim W$.

(*iii*) Prove que $U = (U^\perp)^\perp$ usando um argumento de dimensão apropriado.

[*Observação.* Como estamos usando o produto interno padrão $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$, este exercício segue imediatamento de nosso estudo de aniquiladores. Entretanto, é interessante fazer este exercício supondo que temos um produto interno abstrato (e não necessariamente o *dot product*).]

E76 Seja M uma matriz $n \times n$ triangular superior, com todos seus elementos diagonais iguais a 1. Prove que M é inversível e que sua inversa M^{-1} é triangular superior, com todos seus elementos diagonais iguais a 1.

E77 (*i*) Sejam $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^3$ dois vetores ortonormais, isto é, tais que $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = 0$ e $\|\mathbf{v}_i\| = 1$ para $i \in \{1, 2\}$. Seja $M = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2] \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ a matriz cujas colunas são os vetores $\mathbf{v}_i$. Verifique que $M^\top M$ é uma matriz identidade. Prove que $MM^\top$ não é uma matriz identidade.

(*ii*) Sejam $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^n$ vetores ortonormais, isto é, tais que $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = 0$ para todo $i \neq j$ e $\|\mathbf{v}_i\| = 1$ para todo i. Seja $M = [\mathbf{v}_1 \ldots \mathbf{v}_n] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a matriz quadrada cujas colunas são os vetores $\mathbf{v}_i$. Verifique que $M^\top M = I_n$, onde I_n é a matriz identidade $n \times n$. Prove que $MM^\top = I_n$. Em particular, $M^{-1} = M^\top$.

{*Data de entrega*: 10/12/2022}

E78 Seja $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ uma matriz cujas colunas são linearmente independentes. Prove que $A^\top A$ é uma matriz inversível. [*Sugestão.* Prove que A pode ser escrita como um produto QR onde Q tem colunas ortonormais e R é uma matriz inversível. Use esse fato.] **{*Data de entrega*: 10/12/2022}**

E79 Neste exercício, como de usual, consideramos o produto interno padrão do $\mathbb{R}^n$. Dizemos que uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *preserva* o produto interno se, para todo $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ em $\mathbb{R}^n$, vale que $\langle A\mathbf{x}, A\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$.

(*i*) Prove que se A é ortogonal, então A preserva o produto interno.

(*ii*) Prove que se A é ortogonal, então A preserva a norma, isto é, para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, vale que $\|A\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$.

(*iii*) Prove que se A preserva o produto interno, então A é ortogonal.

(*iv*) Prove que se A preserva a norma, então A é ortogonal.

E80 Seja $\mathbb{F}$ um corpo infinito. Suponha que $U_1, \ldots, U_k$ sejam subespaços de $\mathbb{F}^n$ com $\dim U_i < n$ para todo i. Prove que $\bigcup_{1\le i\le k} U_i \neq \mathbb{F}^n$.

E81 Sejam $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ vetores ortonormais em $\mathbb{R}^n$. Seja $S \subset \{1, \ldots, n\}$ e considere $V_S = \mathrm{Span}\{\mathbf{b}_i : i \in S\}$. Suponha $S = \{i_1, \ldots, i_s\}$ e considere

$$N = [\mathbf{b}_{i_1} \mid \cdots \mid \mathbf{b}_{i_s}] \in \mathbb{R}^{n\times s}. \tag{55}$$

Seja $M = NN^\top$. Prove que, para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, temos

$$\mathbf{x}^{\| V_S} = M\mathbf{x}, \tag{56}$$

onde $\mathbf{x}^{\| V_S}$ é a projeção ortogonal de $\mathbf{x}$ sobre V_S.

E82 Sejam $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_t$ vetores em $\mathbb{R}^n$. Dizemos esses vetores são *quase-co-hiperplanares*, se existem $\mathbf{a}'_1, \ldots, \mathbf{a}'_t \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ tais que, para todo i,

$$\|\mathbf{a}_i - \mathbf{a}'_i\| \le 10^{-10}\|\mathbf{a}_i\| \tag{57}$$

e

$$\langle \mathbf{a}'_i, \mathbf{x} \rangle = 0. \tag{58}$$

Naturalmente, (58) significa que os $\mathbf{a}'_i$ pertencem ao hiperplano ortogonal a $\mathbf{x}$. Grosso modo, os $\mathbf{a}_i$ ($1 \leq i \leq t$) são quase-co-hiperplanares se uma 'pequena perturbação' $\mathbf{a}'_i$ deles são co-hiperplanares (pertencem a um mesmo subespaço de dimensão $n-1$ de $\mathbb{R}^n$). Prove que os vetores da base canônica $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n \in \mathbb{R}^n$ são quase-co-hiperplanares se $n \geq n_0$, onde n_0 é uma constante absoluta.