MÉTODOS PROBABILÍSTICOS EM COMBINATÓRIA E EM TEORIA DA COMPUTAÇÃO I

1o. SEMESTRE DE 2018

EXERCÍCIOS

Entrega. Entregue suas soluções no Paca. Soluções entregues fora de prazo valerão menos.

Política de colaboração e uso de fontes. Todo trabalho entregue por você deve ser seu. Você não deve fornecer suas soluções a seus colegas e você não deve procurar soluções de terceiros (como colegas ou na Web). Por outro lado, você é encorajado a discutir com seus colegas o material visto em sala e os enunciados dos exercícios. Caso você acidentalmente encontre a solução de algum exercício em algum lugar, você deve citar esta fonte em sua solução. Caso você acidentalmente acabe colaborando com colegas na descoberta de uma solução, você deve citar esta colaboração em sua solução. Seu desempenho nesta disciplina ficará prejudicado caso você viole essas regras.

1. Prove as seguintes estimativas.
   (*i*) $1 + x \leq \mathrm{e}^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
   (*ii*) $1 + x > \exp\{x - x^2/2\}$ para todo $0 < x \leq 1$.
   (*iii*) $1 - x > \exp\{-x - x^2\}$ para todo $0 < x < x_0$, para algum $x_0 > 0$. De fato, podemos tomar, por exemplo, $x_0 = 0.68$.
   (*iv*) Prove que $1 + x \geq \exp\{x/(1 + x)\}$ para todo $x > -1$.
   [*Sugestão.* Lembre que $1/(1 - x) = 1 + x + x^2 + \dots$ uniformemente se $|x| \leq x_0$ e $x_0 < 1$. Integre ambos os lados para obter
$$-\log(1 - x) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots\ ] \tag{1}$$

2. Prove que, para todo inteiro $n \geq 1$, temos
$$\mathrm{e}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \leq n! \leq n\mathrm{e}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n. \tag{2}$$

   {*Data de entrega*: 14/3/2018}

3. Prove as seguintes estimativas para $\binom{a}{b}$, onde a e b são inteiros não-negativos.
   (*i*) Se $a \geq b$, então
$$\binom{a}{b} \geq \left(\frac{a}{b}\right)^b. \tag{3}$$
   (*ii*) Ademais,
$$\binom{a}{b} \leq \frac{a^b}{b!}. \tag{4}$$
   (*iii*) Para todo $b > 0$,
$$\binom{a}{b} \leq \left(\frac{\mathrm{e}a}{b}\right)^b. \tag{5}$$
   [*Sugestão.* Avalie $(1 + x)^a$ por cima e por baixo para $x = b/a$. Use, para tanto, $1 + x \leq \mathrm{e}^x$ e o binômio de Newton: $(1 + x)^a \geq \binom{a}{b}x^b$.]

Date: Versão de 2018/6/19, 4:05pm.

(*iv*) Prove a seguinte versão mais forte de (*iii*): se $b \leq a$, então

$$\sum_{0 \leq j \leq b} \binom{a}{j} \leq \left(\frac{\mathrm{e}a}{b}\right)^b. \tag{6}$$

4. A fórmula de Stirling diz que

$$n! = (1 + o(1)) \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}, \tag{7}$$

onde $o(1) \to 0$ conforme $n \to \infty$.

(*i*) Prove que, para todo ℓ fixo, independente de n, temos

$$\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor + \ell} = (1 + o(1)) 2^n \sqrt{\frac{2}{\pi n}}, \tag{8}$$

onde $o(1) \to 0$ conforme $n \to \infty$.

(*ii*) Prove que se $k = k(n) = n/2 + c_n\sqrt{n}$, onde $c_n \to c$ ($n \to \infty$) e c é uma constante, então

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \sim \frac{d}{\sqrt{n}} 2^n, \tag{9}$$

onde $d = d(c) > 0$ é uma constante que depende apenas de c.

(*iii*) Prove que, para todo $0 < \alpha < 1$ fixo, temos

$$\binom{n}{\lfloor \alpha n \rfloor} = \left(\frac{1}{\alpha^\alpha (1-\alpha)^{1-\alpha}}\right)^{(1+o(1))n}, \tag{10}$$

ou, equivalentemente,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \binom{n}{\alpha n} = H(\alpha), \tag{11}$$

onde $H(\alpha) = \alpha \log(1/\alpha) + (1-\alpha)\log(1/(1-\alpha))$ é a assim chamada função entropia.

5. Seja $(\Omega, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade finito. Suponha que haja n eventos independentes $A_1, \ldots, A_n \subset \Omega$ com $0 < \mathbb{P}(A_i) < 1$ para todo i. Prove que $|\Omega| \geq 2^n$. **{*Data de entrega*: 14/3/2018}**

6. Seja G um grafo. Defina $d_i(x)$ ($x \in V(G)$) como sendo o número de vértices à distância i de x. Por exemplo, $d_1(x) = d(x)$ é o grau de x.

(*i*) Seja G um grafo livre de triângulos. Prove que

$$\alpha(G) \geq \sum_{v \in V(G)} \frac{d_1(v)}{1 + d_1(v) + d_2(v)}. \tag{12}$$

(*ii*) Seja G um grafo livre de C^3 e C^5 (isto é, G não contém circuitos de comprimento 3 ou 5). Deduza de (*i*) que

$$\alpha(G) \geq \sqrt{n\bar{d}/2} = \sqrt{|E(G)|}, \tag{13}$$

onde $\bar{d} = 2|E(G)|/|V(G)|$ é o grau médio de G.

{*Data de entrega*: 28/3/2018}

7. Considere o algoritmo básico $\mathcal{A}$ de construção de árvores binárias de busca (ABBs). Se uma ABB T está vazia, ao inserirmos x em T, a ABB T passa a ter x como raiz. Se T não é vazia, ao inserirmos x, comparamos x com a raiz de T, e decidimos se devemos inserir x na subárvore esquerda de T ou na subárvore direita de T, e o fazemos recursivamente.

Suponha $x_1 < \cdots < x_n$ e seja $\pi \in_U S_n$. Suponha que construímos a ABB T com n nós alimentando a sequência $x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(n)}$ a $\mathcal{A}$.

(i) Seja $N(\pi)$ o número total de comparações que são feitas por $\mathcal{A}$ na construção de T. Prove que $\mathbb{E}(N) \leq 2n \log n$.

(ii) Suponha que geramos T como acima, e ainda escolhemos algum elemento x_i ($i \in [n]$) uniformemente ao acaso. Suponha que buscamos x_i em T até encontrá-lo. Seja C o número esperado de comparações que fazemos nessa busca com sucesso de x_i (ao compararmos x_i com algum elemento y da árvore, a resposta será $x_i = y$, $x_i < y$ ou $x_i > y$). Prove que $C \leq 2 \log n$.

{*Data de entrega*: 28/3/2018}

8. Seja P um conjunto pontos no plano. Três pontos não-colineares de P determinam um triângulo de área positiva.

(i) Encontre uma configuração $P \subset \mathbb{R}^2$ com $|P| = n$ que determina $\Omega(n^2)$ triângulos de área unitária.

(ii) Prove que se $|P| = n$, então o número de triplas de pontos de P que determinam triângulos de área unitária é $O(n^{7/3})$. [*Sugestão.* Seja $\mathcal{L}_0 = \{\ell\colon |\ell \cap P| \geq 2\}$ o conjunto de retas determinadas por P. Seja também $\mathcal{L}_1 = \{\ell\colon \ell \parallel \ell_0 \in \mathcal{L}_0 \text{ e } \ell \cap P \neq \emptyset\}$ o conjunto das retas que interceptam P e são paralelas a alguma reta de $\mathcal{L}_0$. Dizemos que uma reta $\ell \in \mathcal{L}_1$ é *rica* se $|\ell \cap P| \geq n^{1/3}$ e *pobre* caso contrário. Seja $\mathcal{L}_1^1 \subset \mathcal{L}_1$ o conjunto das retas ricas. Seja $\triangle abc$ um triângulo determinado por P. Considere o lado ab desse triângulo e seja ℓ_{ab} a reta determinada por ab. Seja ℓ_c^{ab} a reta em $\mathcal{L}_1$ com $\ell_c^{ab} \parallel \ell_{ab}$ e $c \in \ell_c^{ab}$. Dizemos que ab é *pobre* se ℓ_c^{ab} é pobre. Prove que o número de triângulos de área 1 determinados por P que têm um lado pobre é $O(n^{7/3})$.]

{*Data de entrega*: 11/4/2018}

9. Seja P um conjunto de n pontos no plano, não todos contidos em uma mesma reta. Mostre que há um ponto $x \in P$ tal que x pertence a pelo menos cn retas distintas determinadas por P, onde $c > 0$ é uma constante absoluta. (Uma reta L é determinada por P se $|L \cap P| \geq 2$). **{*Data de entrega*: 4/4/2018}**

10. Sejam $v_i = (x_i, y_i)$ ($1 \leq i \leq n$) vetores com coordenadas inteiras. Suponha que $|x_i|$, $|y_i| \leq 10^{-2} n^{-1/2} 2^{n/2}$ para todo i. Prove que existem conjuntos disjuntos I e $J \subset [n]$ tais que
$$\sum_{i \in I} v_i = \sum_{j \in J} v_j. \tag{14}$$

{*Data de entrega*: 11/4/2018}

11. Derive o teorema de Rödl do teorema de Frankl, Rödl e Pippenger (isto é, prove que a conjectura de Erdős e Hanani é um corolário do teorema de Frankl, Rödl e Pippenger).

{*Data de entrega*: 23/4/2018}

12. Um *n-empacotamento* de um grafo H é uma coleção $\mathcal{P} = \{H_1, \ldots, H_t\}$ de subgrafos H_i de um grafo completo K^n fixo, com H_i isomorfo a H para todo i e $E(H_i) \cap E(H_j) = \emptyset$ para todo $i \neq j$. O *tamanho* de um tal empacotamento $\mathcal{P}$ é $|\mathcal{P}|$.

(i) Encontre um 5-empacotamento de C^5 (o circuito de comprimento 5) de tamanho 2.

(*ii*) Seja $p_{C^5}(n)$ o tamanho máximo de um n-empacotamento de C^5. Determine $p_{C^5}(n)$ assintoticamente, isto é, encontre uma função $f(n)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} p_{C^5}(n)/f(n) = 1 \tag{15}$$

(Naturalmente, prove que (15) vale para sua função $f(n)$.)

(*iii*) Seja H um grafo arbitrário e defina $p_H(n)$ de forma análoga. Generalize seu resultado de (*ii*). Neste item, basta esboçar as demonstrações.

{*Data de entrega*: 23/4/2018}

13. Neste exercício, generalizamos a noção n-empacotamento do Exercício 12: em vez de considerarmos subgrafos aresta-disjuntos de K^n, consideramos subgrafos aresta-disjuntos de um grafo arbitrário G. Chamamos tais de empacotamentos de *G-empacotamentos* de H e definimos $p_H(G)$ de forma análoga a $p_H(n)$. Consideramos o caso em que G é o grafo aleatório $G(n,p)$.

(*i*) Prove que $p_{K^3}(G(n,p)) = o(pn^2)$ quase certamente se $p \ll n^{-1/2}$.

(*ii*) Determine $p_{K^3}(G(n,p))$ assintoticamente para $p \gg ((\log n)/n)^{1/2}$. [*Observação.* Enuncie precisamente o resultado que você provará como resposta a esse item.]

{*Data de entrega*: 18/5/2018}

14. Suponha agora que $p = (C/n)^{1/2}$, onde C é uma constante.

(*i*) Prove que existem constantes absolutas C_0 e $\varepsilon > 0$ tais que se $C \geq C_0$, então

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(p_{K^3}(G(n,p)) \geq \varepsilon\,\frac{p}{3}\binom{n}{2}\right) = 1. \tag{16}$$

[*Sugestão.* Seja $K_+^{2,k}$ $(k \geq 1)$ o grafo que obtemos ao adicionarmos ao grafo bipartido completo $K^{2,k}$ uma aresta à parte de cardinalidade 2. Conte o número de ocorrências de $K_+^{2,k}$ em $G(n,p)$ e prove que é possível remover-se uma pequena fração das arestas de $G(n,p)$ de forma que todas as arestas passam a pertencer a um número limitado de triângulos.] **{*Data de entrega*: 18/5/2018}**

(*ii*) Decida se, para todo $\varepsilon > 0$, existem C_0 e n_0 tais que se $C \geq C_0$, então

$$\mathbb{P}\left(p_{K^3}(G(n,p)) \geq (1-\varepsilon)\frac{p}{3}\binom{n}{2}\right) \geq .99 \tag{17}$$

para todo $n \geq n_0$.

(*iii*) Decida se, para todo $\varepsilon > 0$, existe C_0 tal que se $C \geq C_0$, então

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(p_{K^3}(G(n,p)) \geq (1-\varepsilon)\frac{p}{3}\binom{n}{2}\right) = 1. \tag{18}$$

15. Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é um *θ-conjunto* se, para quaisquer x, y e $z \in X$ distintos, o ângulo $\angle xyz$ com vértice y e lados yx e yz é menor que θ, isto é,

$$\cos^{-1}\frac{\langle x-y, z-y\rangle}{\|x\|\|y\|} < \theta \tag{19}$$

(aqui supomos $0 \leq \cos^{-1} x \leq \pi$). Prove que, para quaisquer $n \geq 1$ e $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que existe um $(\pi/3+\varepsilon)$-conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ com $|X| \geq (1+\delta)^n$.

16. Seja $\alpha(G)$ o *número de independência* de G, isto é,

$$\alpha(G) = \max\{k\colon K^k \subset G^{\mathrm{c}}\}, \tag{20}$$

onde G^{c} é o complemento de G. Prove que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\alpha(G(n,1/2)) < 2\log_2 n\right) = 1. \tag{21}$$

[*Sugestão.* Use a estimativa (5).] Deduza que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\chi(G(n,1/2)) > n/2\log_2 n\right) = 1, \tag{22}$$

onde $\chi(G)$ denota o *número cromático* de G, o número necessário e suficiente de conjuntos independentes de G para cobrir $V(G)$. **{*Data de entrega*: 11/5/2018}**

17. Uma *subdivisão* de um grafo H é um grafo $\mathrm{T}H$ obtido substituindo-se arestas de H por caminhos de comprimento 1 ou mais, com todos esses caminhos internamente disjuntos nos vértices. (Subdivisões de H são também chamadas de cópias topológicas de H.) Seja

$$\sigma(G) = \max\{k\colon \exists\, \mathrm{T}K^k \subset G\}. \tag{23}$$

Assim, $\sigma(G)$ é o maior k para o qual G contém uma subdivisão de um grafo completo de ordem k. Uma conjectura de Hajós (1961) afirmava que $\chi(G) \le \sigma(G)$ (esta conjectura é mais forte que uma bem-conhecida conjectura da Hadwiger). Use (22) para provar que a conjectura de Hajós é em geral falsa. **{*Data de entrega*: 11/5/2018}**

18. Prove que existe uma constante $c > 0$ tal que quase-certamente $\sigma(G(n,1/2)) \ge c\sqrt{n}$. [*Sugestão.* Separe um conjunto de vértices S para serem os vértices de um K^k ($k \sim c\sqrt{n}$). Para obter $\mathrm{T}K^k \subset G(n,1/2)$, conecte todos os pares $\{x,y\} \in \binom{S}{2}$ por caminhos de comprimento 2. Para tanto, mostre que, para qualquer $\{x,y\}$, há um grande número de tais caminhos.] **{*Data de entrega*: 11/5/2018}**

19. Seja $V = \{0,1\}^n$ ($n \ge 1$). Defina o grafo Q^n sobre V, colocando em Q^n todas as arestas da forma $\{x,x'\}$, onde x e x' diferem em exatamente uma coordenada. O grafo Q^n assim obtido é o *n-hipercubo* ou *n-cubo.* O n-cubo tem $N = 2^n$ vértices e $nN/2 = n2^{n-1}$ arestas. Seja d a função distância em Q^n, isto é, para x e $y \in Q^n$, seja $d(x,y)$ a distância de x a y em Q^n. Seja $\operatorname{diam} Q^n = \max\{d(x,y)\colon x,\, y \in V(Q^n)\}$ e seja $\operatorname{Ave}_{x,\,y\in V(Q^n)} d(x,y) = 2^{-2n}\sum_{x,y\in V(Q^n)} d(x,y)$. Seja $S \subset V(Q^n)$. Pomos $d(x,S) = \min\{d(x,s)\colon s \in S\}$ para todo $x \in V(Q^n)$. Para $S \subset V(Q^n)$ e $r \ge 0$, seja $B(S,r) = \{x \in V(Q^n)\colon d(x,S) \le r\}$.
   (*i*) Prove que $\operatorname{diam}(Q^n) = n$.
   (*ii*) Prove que, se $S \ne \emptyset$, então $B(S,n) = V(Q^n)$.
   (*iii*) Prove que $\operatorname{Ave}_{x,\,y\in V(Q^n)} d(x,y) = n/2$.

20. Continuamos a considerar o n-cubo Q^n (veja o Exercício 19). Seja $S \subset V(Q^n)$ não-vazio.
   (*i*) Seja $\alpha = |S|2^{-n}$ e $r = \sqrt{2n\log 1/\alpha}$. Prove que

$$|B(S,r)| \ge (1-\alpha)2^n. \tag{24}$$

   [*Sugestão.* Seja $f(x) = d(x,S)$ ($x \in V(Q^n)$). Observe que $S = \{f = 0\}$.]
   (*ii*) Seja $\omega = \omega(n)$ qualquer função com $\lim_{n\to\infty}\omega(n) = \infty$ e suponha que $|S| \ge 10^{-10}2^n$. Prove que quase todo $x \in V(Q^n)$ está a uma distância menor ou igual a $\omega\sqrt{n}$ de S, isto é, prove que

$$\lim_{n\to\infty} |B(S,\omega\sqrt{n})|2^{-n} = 1. \tag{25}$$

{*Data de entrega*: 18/5/2018}

21. Sejam H e G grafos. Um *vértice-empacotamento* de H em G é uma família $\mathcal{F} = \{H_1, \dots, H_t\}$ de subgrafos de G com cada H_i isomorfo a H e tal que os H_i são dois-a-dois vértice-disjuntos ($V(H_i) \cap V(H_j) = \emptyset$ para todo $i \neq j$). Seja $q_H(G)$ a cardinalidade máxima de um vértice-empacotamentos de H em G. Naturalmente, $q_H(G) \leq |V(G)|/|V(H)|$.

    (i) Prove que $q_{K^3}(G(n,p)) = o(n)$ quase certamente se $p \ll n^{-2/3}$.

    (ii) Prove que, para todo $\varepsilon > 0$, existe C tal que se $p \geq Cn^{-2/3}$, então $q_{K^3}(G(n,p)) \geq (1/3 - \varepsilon)n$ quase certamente.

    (iii) Seja agora H um grafo arbitrário. Encontre uma constante $\alpha = \alpha(H)$ para a qual valem as seguintes afirmações.

      (a) Se $p \ll n^{-1/\alpha}$, então $q_H(G(n,p)) = o(n)$ quase certamente.

      (b) Para todo $\varepsilon > 0$, existe C tal que se $p \geq Cn^{-1/\alpha}$, então, quase certamente, vale que $q_H(G(n,p)) \geq (1-\varepsilon)n/h$, onde $h = |V(H)|$.

    {*Data de entrega*: 25/5/2018}

22. Seja $G = (V, E)$ um grafo e ℓ um inteiro positivo. Suponha que temos $L\colon V \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$, uma função com $|L(v)| \geq \ell$ para todo v. Ademais, suponha o seguinte: *para todo v e todo $c \in L(v)$, vale que no máximo $\ell/2e$ vértices w adjacentes a v são tais que $c \in L(w)$.* Prove que existe $\chi\colon V \to \mathbb{N}$ com $\chi(v) \in L(v)$ para todo v tal que, para toda aresta $\{v, w\} \in E$, temos $\chi(v) \neq \chi(w)$ (isto é, χ é uma coloração própria de G que 'respeita' as listas $L(v)$ ($v \in V$); as cores em $L(v)$ são ditas *admissíveis* para v). [*Observação.* Resolva este exercício inicialmente para grafos finitos G. Resolva depois para grafos G com V infinito enumerável, por exemplo, supondo que $V = \mathbb{N}$. Se você conhece argumentos de compacidade, resolva este exercício para grafos G com V de cardinalidade arbitrária.] **{*Data de entrega*: 29/6/2018}**