FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA PARA A COMPUTAÇÃO

1o. SEMESTRE DE 2018

EXERCÍCIOS FEITOS EM SALA

S1. (7/3/2018) Dois conjuntos A e B são *comparáveis* se $A \subset B$ ou $B \subset A$. Seja X um conjunto finito com n elementos. Suponha que $A_1, \dots, A_{n+2}$ sejam $n+2$ subconjuntos de X distintos. Prove que existem i e j com $1 \le i \le n+2$ e $1 \le j \le n+2$ tais que A_i e A_j não são comparáveis. [*Observação.* Se você preferir, você pode se restringir ao caso concreto em que $n = 8$.]

S2. (14/3/2018) Encontre uma fórmula φ que tenha a seguinte tabela-verdade:

p	q	r	φ
V	V	V	V
V	V	F	V
V	F	V	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	V	F	V
F	F	V	F
F	F	F	V

S3. (21/3/2018) Prove que não existe um inteiro x tal que x^2 é da forma $3k+2$ com k inteiro.

S4. (4/4/2018) Prove que a equação

$$x^{10} + 2mx + 2n = 0 \tag{1}$$

não tem soluções racionais se m e n são ímpares.

S5. (11/4/2018) Prove que, para todo $n \ge 1$, vale que

$$\sum_{1 \le k \le n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \le 2 - \frac{1}{n}. \tag{2}$$

[*Observação.* De fato, Euler (1735) provou que a soma em (2) converge para $\pi^2/6 = 1.6449\dots$. Veja, por exemplo, `http://math.cmu.edu/~bwsulliv/MathGradTalkZeta2.pdf`.]

S6. (9/5/2018) Neste exercício, queremos comparar $\lfloor nx \rfloor$ e $n\lfloor x \rfloor$ para $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$.

(i) Calcule $\lfloor nx \rfloor$, $n\lfloor x \rfloor$ e $\{x\}$ nos seguintes dois casos:

(a) $n = 5$ e $x = \pi$,

(b) $n = 5$ e $x = -\pi$.

(ii) Prove que, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$, temos que $\lfloor nx \rfloor = n\lfloor x \rfloor$ se e só se $n\{x\} < 1$.

S7. (16/5/2018) Seja $n \in \mathbb{N}$. Suponha que n não seja primo e que $n > 4$. Prove que $n \mid (n-1)!$.

S8. (23/5/2018) Sejam m e n inteiros. Prove que $\mathrm{mdc}(m+1, n+1) \mid mn - 1$. [*Sugestão.* Você pode preferir provar o seguinte fato, que implica o resultado que queremos: se $c \in \mathbb{Z}$ divide ambos $m+1$ e $n+1$, então $c \mid mn - 1$.]

Date: Versão de 2018/7/4, 12:54 Noon.

S9. (6/6/2018) Suponha que $a \equiv b \pmod{m}$ e que $a \equiv b \pmod{n}$, onde a e b são inteiros e m e n são naturais positivos com $\mathrm{mdc}(m, n) = 1$. Prove que $a \equiv b \pmod{mn}$. [*Sugestão.* Lembre-se do lema de Gauss: se $a \mid bc$ e $\mathrm{mdc}(a, b) = 1$, então $a \mid c$.]

S10. (13/6/2018) Seja p um primo ímpar. Prove que $p \mid (p-3)! - (p-1)/2$. [*Observação.* Devido ao trancaço promovido pelo SINTUSP, não houve entrega desse exercício.]

S11. (27/6/2018) Sejam a e b naturais positivos. Prove que existe um natural d que satisfaz as seguintes duas propriedades:

(i) $d \mid a$ e $d \mid b$ e

(ii) se c é um natural tal que $c \mid a$ e $c \mid b$, então $c \mid d$.

Ademais, suponha que d' seja um natural tal que

(i') $d' \mid a$ e $d' \mid b$ e

(ii') se c é um natural tal que $c \mid a$ e $c \mid b$, então $c \mid d'$.

Prove que $d' = d$.

S12. (4/7/2018)

(i) Seja X um conjunto e $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ uma família de subconjuntos de X. A família $\mathcal{F}$ admite uma relação de ordem parcial natural dada pela relação "$\subset$", a saber,

$$\{(A, B) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} \colon A \subset B\}. \tag{3}$$

O que significa dizer que $F \subset X$ é um elemento minimal de $\mathcal{F}$ em relação a essa ordem?

(ii) Continuando com (i), prove que se $\mathcal{F}$ é finito e não-vazio (isto é, $\mathcal{F}$ tem um número finito de elementos e $\mathcal{F} \neq \emptyset$), então $\mathcal{F}$ tem um elemento minimal.

(iii) Tomemos agora $X = \mathbb{N}$ e

$$\mathcal{F} = \{F \subset X \colon F \text{ é infinito}\}. \tag{4}$$

Assim, $\mathcal{F}$ é o conjunto dos conjuntos infinitos de naturais. Decida se $\mathcal{F}$ tem um elemento minimal em relação à ordem dada por "$\subset$". Justifique sua resposta. [*Observação.* Um conjunto é *finito* se ele tem um número finito de elementos `:-)`. Um conjunto é *infinito* se ele não é finito `:-D`.]