PROVA 1

MAC105 FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA PARA A COMPUTAÇÃO

1o. SEMESTRE DE 2018

Nome:
Número USP:

Instruções:

(*1*) Esta prova é individual.
(*2*) A prova consiste de **4** questões (contando a Questão 0 nesta página). Note que é possível tirar mais de 100 pontos nessa prova `:-)`
(*3*) Para ter nota integral em uma questão, a escrita de sua solução deve estar muito boa.
(*4*) As respostas devem estar nos locais indicados.
(*5*) Não é permitido o uso de aparelhos eletrônicos de qualquer natureza.
(*6*) Não destaque as folhas deste caderno.
(*7*) Não use folhas avulsas para rascunho. Não é necessário apagar seus rascunhos.
(*8*) Não é permitido consultar nenhum material ou consultar colegas.

Assinatura:

Sua assinatura acima atesta a autenticidade e originalidade de seu trabalho e que você compromete-se a seguir o código de ética da USP em todas as suas atividades, incluindo esta prova.

Boa sorte!

Q	0	1	2	3	**Total**
Nota					

Q0. **[5 pontos]** Leia o conteúdo desta página e preencha os itens requisitados. Assine acima, e atente ao significado de sua assinatura.

Data: 2018/4/23, 11:54am

Q1. [25 pontos] Dado $x \in \mathbb{R}$, definimos $|x|$, o *módulo de* x (ou o *valor absoluto de* x), como sendo $-x$ se $x < 0$ e x se $x \geq 0$. Prove que, para todo x e $y \in \mathbb{R}$, temos

$$|x + y| \leq |x| + |y|. \tag{1}$$

Resposta:

Q2. **[40 pontos]** Nesta questão, consideramos fórmulas booleanas $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ nas variáveis $x_1,\dots,x_n$. Por exemplo, poderíamos ter

$$\varphi(x_1,\dots,x_5) = (x_1 \vee (x_2 \wedge x_3)) \wedge (\neg x_2 \vee (x_1 \wedge x_5)) \wedge x_3. \tag{2}$$

Vamos usar 1 e 0 para indicar verdadeiro e falso (V e F). Dado $a = (a_1,\dots,a_n) \in \{0,1\}^n$, podemos *avaliar* $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ em a, isto é, podemos calcular $\varphi(a)$, e obtemos 0 ou 1 ao fazermos isso.

(*i*) Calcule $\varphi(1,1,1,1,0)$ e $\varphi(1,0,0,1,0)$ para φ dado em (2). (Não é necessário justificar sua resposta.)

Resposta:

(*ii*) Se $a = (a_1,\dots,a_n) \in \{0,1\}^n$ e $b = (b_1,\dots,b_n) \in \{0,1\}^n$, dizemos que a é *dominado* por b se $a_i \le b_i$ para todo i. Nesse caso, escrevemos $a \le b$. Por exemplo, se $a = (1,0,1,0,0)$, $b = (1,1,1,0,1)$ e $c = (1,0,0,0,1)$, então $a \le b$ e $a \not\le c$ (isto é, $a \le c$ não vale). Dizemos que $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ é *monótona* se $a \le b$ implica que $\varphi(a) \le \varphi(b)$. Prove que φ em (2) não é monótona.

Resposta:

(*iii*) Seja

$$\psi(x_1,\dots,x_5) = (x_1 \vee (x_2 \wedge x_3)) \wedge (x_2 \vee (x_1 \wedge x_5)) \wedge x_3. \tag{3}$$

Diga se ψ é ou não é monótona. (Não é necessário justificar sua resposta.)

Resposta:

(*iv*) Dizemos que uma fórmula $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ é *livre de negações* se φ só contém os operadores $\vee$ e $\wedge$ (em particular, φ não contém $\neg$). Por exemplo, φ em (2) *não* é livre de negações, enquanto que ψ em (3) é. Prove, por indução, que uma fórmula $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ livre de negações é monótona. [*Sugestão.* Se φ é livre de negações e φ contém ao menos um $\vee$ ou ao menos um $\wedge$, então $\varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2$ ou $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$ para φ_1 e φ_2 livres de negações.]

Resposta:

Resposta (continuação):

Q3. [50 pontos] Para $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}([n])$ $(n \in \mathbb{N})$, pomos

$$\mathcal{A} + \mathcal{A} = \{A \triangle A' \colon A \in \mathcal{A} \text{ e } A' \in \mathcal{A}\}. \tag{4}$$

Por exemplo, se $\mathcal{A} = \big\{\{1,2\},\{1,3\}\big\} \subset \mathcal{P}([3])$, então $\mathcal{A} + \mathcal{A} = \big\{\emptyset, \{2,3\}\big\}$.

(*i*) Sejam dados A, B e $C \subset [n]$. Suponha que $A \triangle B = A \triangle C$. Prove que $B = C$.

Resposta:

(*ii*) Prove que, para todo $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}([n])$, temos $|\mathcal{A} + \mathcal{A}| \geq |\mathcal{A}|$.

Resposta:

(*iii*) Sejam dados $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}([n])$ tais que $|\mathcal{A}| + |\mathcal{B}| > 2^n$. Prove que existem $A \in \mathcal{A}$, $A' \in \mathcal{A}$ e $B \in \mathcal{B}$ tais que $A \triangle A' = B$.

Resposta:

Resposta (continuação):

(*iv*) Sejam $\mathcal{A} = \{A \subset [n] \colon |A| \text{ é par}\}$ e $\mathcal{B} = \{B \subset [n] \colon |B| \text{ é ímpar}\}$. Determine $|\mathcal{A}| + |\mathcal{B}|$. Existem $A \in \mathcal{A}$, $A' \in \mathcal{A}$ e $B \in \mathcal{B}$ tais que $A \triangle A' = B$? [*Sugestão.* Considere a paridade de $|C|$ para $C \in \mathcal{A} + \mathcal{A}$.]

Resposta: