

1  
2  
3  
4  
5  
6  
7  
8  
9  
10  
11  
12

*SINOPSE DAS AULAS*  
**MAC6904 TÓPICOS EM COMBINATÓRIA CONTEMPORÂNEA I**  
*PRIMEIRO SEMESTRE DE 2017*

Notas de aula produzidas por

1. Bruno Pasqualotto Cavalari,
2. Felix Yowtang Liu,
3. Gabriel Ferreira Barros,
4. Gervásio Protásio dos Santos Neto,
5. Marcelo Soares Campos,
6. Marcelo Tadeu Sales e
7. Victor Sanches Portella.

15	<b>Parte 1. TEORIA EXTREMAL DOS CONJUNTOS</b>	4
16	1. Dois resultados iniciais	4
17	1.1. O Teorema de Sperner	4
18	1.2. O Teorema de Bollobás	7
19	2. Uma aplicação de Sperner em Teoria dos Números (Teorema de Behrend)	10
20	3. Teoremas de interseção	13
21	3.1. Teorema de Erdős-Ko-Rado	13
22	3.2. Teorema de Katona	17
23	4. Teoremas de interseção e aplicações geométricas	21
24	4.1. Variantes do teorema de Ray-Chaudhuri-Wilson	21
25	4.2. O número cromático do $\mathbb{R}^n$	23
26	4.3. A conjectura de Borsuk	24
27	4.4. Construção de cotas inferiores para o número de Ramsey via teoremas de interseção	27
28	5. A conjectura de Kneser	28
29	5.1. Teoremas de Borsuk-Ullam	29
30	5.2. Variante de Dol'nikov	31
31	<b>Parte 2. O MÉTODO PROBABILÍSTICO</b>	33
32	6. Espaços discretos	33
33	6.1. As desigualdades de Markov e Chebyshev	35
34	6.2. Aplicação: O número de Ramsey	35
35	7. Método do 2o Momento	36
36	8. Grafos com número cromático grande e cintura grande	39
37	9. Funções Limiares	41
38	9.1. Continência de subgrafos pequenos	42
39	9.2. Continência de subgrafos pequenos em $G(n, p)$	46
40	9.3. Conexidade	47
41	10. Probabilidades exponencialmente pequenas	49
42	10.1. Um problema geométrico	49
43	10.2. Cotas para a distribuição binomial	51
44	11. Imersão de árvores	53
45	<b>Parte 3. O MÉTODO DA REGULARIDADE</b>	57
46	12. Definições e resultados iniciais	57
47	13. Aplicações	58
48	13.1. Grafos $k$ -universais	58
49	<b>Parte 4. ...</b>	63
50	14. Revisão	63
51	15. Teste de linearidade	64

52	<b>Parte 5. BIBLIOGRAFIA</b>	68
53	Referências	68

54 **Parte 1. TEORIA EXTREMAL DOS CONJUNTOS**

55 §1. DOIS RESULTADOS INICIAIS

56 Nesta seção, trataremos de dois resultados da teoria extremal de conjuntos: o Teorema de  
57 Sperner e o Teorema de Bollobás.<sup>1</sup>

58 Começamos observando dois problemas extremais da teoria dos números.

59 **Proposição 1.** *Seja  $S \subseteq [2n] = \{1, \dots, 2n\}$  tal que  $|S| \geq n + 1$ . Então existem  $a, b \in S$  tais que*  
60  *$a \neq b$  e  $\text{mdc}(a, b) = 1$ .*

61 *Demonstração.* Como cada número tem um sucessor, e  $|S| > n$ ,  $S$  conterá um número e seu  
62 sucessor; o mdc entre eles é 1. □

63 **Proposição 2.** *Seja  $S \subseteq [2n] = \{1, \dots, 2n\}$  tal que  $|S| \geq n + 1$ . Então existem  $a, b \in S$  tais que*  
64  *$a \neq b$  e  $a|b$ .*

65 *Demonstração.* Tomando  $m \in S$ , podemos escrever  $m = 2^k m'$ , onde temos  $k = k(m)$  e  $m' =$   
66  $m'(m)$  funções de  $m$ .

67 Existem apenas  $n$  alternativas para  $m'$ , então devem existir  $a, b \in S$  tais que  $m'(a) = m'(b)$ , o  
68 que implica que  $a|b$  ou  $b|a$ . □

69 1.1. O Teorema de Sperner.

70 **Definição 3.** *Seja  $\mathcal{A} \subseteq 2^{[n]}$  uma família de conjuntos. Dizemos que  $\mathcal{A}$  é **Sperner** se não*  
71 *existem  $A, B \in \mathcal{A}$ ,  $A \neq B$ , tais que  $A \subset B$ .*

72 Qual é o tamanho máximo de uma família Sperner em  $[n]$ ? Defina:

$$f(n) = \max |\mathcal{A}|, \text{ onde } \mathcal{A} \text{ é Sperner}$$

73 Temos que  $f(n) \geq n$ , uma vez que a família composta por todos os conjuntos unitários é  
74 Sperner. Para uma cota melhor, percebemos que se  $\mathcal{A}$  contém apenas conjuntos de mesma  
75 cardinalidade, então  $\mathcal{A}$  é Sperner. Tomando a coleção que contém todos os conjuntos de  
76 cardinalidade  $\lfloor n/2 \rfloor$ , temos  $f(n) \geq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ .

77 De fato temos:

**Teorema 4** (Teorema de Sperner).

$$f(n) = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

---

<sup>1</sup>Notas produzidas por Gervásio Santos e Felix Liu.

78 Para provar o Teorema de Sperner, vamos utilizar o seguinte resultado, por Bollobás, Lubell,  
79 Yamamoto e Meshalkin:

80 **Teorema 5** (Desigualdade de BLYM). *Seja  $\mathcal{A} \in 2^{[n]}$  uma família Sperner. Então*

$$\sum_{A \in \mathcal{A}} \binom{n}{|A|}^{-1} \leq 1.$$

81 *Prova do T. de Sperner através de BLYM.* Temos que o seguinte vale para todo  $k$ :

$$\binom{n}{k} \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

82 Da desigualdade de BLYM, temos então que:

$$1 \geq \sum_{A \in \mathcal{A}} \binom{n}{|A|}^{-1} \geq \sum_{A \in \mathcal{A}} \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}^{-1} = |\mathcal{A}| \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}^{-1}.$$

83 Então

$$|\mathcal{A}| \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

84 Mas como é possível construir uma família Sperner com cardinalidade  $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$  (a família com  
85 todos os conjuntos com  $\lfloor n/2 \rfloor$  elementos), temos que  $f(n) = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ .  $\square$

86 Agora vamos provar a desigualdade de BLYM.

87 *Prova de BLYM - [18].* Considere uma permutação  $\pi : [n] \rightarrow [n]$ . Vamos definir que um  
88 conjunto  $A \in \mathcal{A}$  e  $\pi$  são compatíveis se

$$A = \{\pi(1), \dots, \pi(a)\}, \text{ onde } a = |A|.$$

89 Seja  $T = \#\{(\pi, A) : \pi \in S_n, A \in \mathcal{A}, A \text{ compatível com } \pi\}$ . Temos:

$$T = \sum_{\pi \in S_n} \sum_{A \in \mathcal{A}} \mathbb{1}\{A \text{ e } \pi \text{ são compatíveis}\} \tag{1}$$

90 e

$$T = \sum_{A \in \mathcal{A}} \sum_{\pi \in S_n} \mathbb{1}\{A \text{ e } \pi \text{ são compatíveis}\}. \tag{2}$$

91 Observamos que para uma permutação  $\pi$  fixa, pode existir apenas um  $A \in \mathcal{A}$  que é compatível  
92 com ela. Se houvesse um segundo conjunto  $B \in \mathcal{A}$ ,  $B \neq A$ , teríamos que  $A \subset B$  ou  $B \subset A$ , o  
93 que não pode acontecer pois  $\mathcal{A}$  é Sperner por hipótese.

94 Então temos para a equação 1 que

$$\begin{aligned} T &= \sum_{\pi \in S_n} \sum_{A \in \mathcal{A}} \mathbb{1}\{A \text{ e } \pi \text{ são compatíveis}\} \\ &\leq \sum_{\pi \in S_n} 1 = n!. \end{aligned}$$

95 Por outro lado, se fixamos um conjunto  $A \in \mathcal{A}$ , observamos que uma permutação  $\pi$  é  
96 compatível com  $A$  se as primeiras  $|A|$  posições de  $\pi$  estiverem em  $A$  e nenhum elemento  $x \in A^C$   
97 é tal que  $\pi^{-1}(x) \leq |A|$ . Então, podemos permutar os elementos de  $A$  nas primeiras  $|A|$  posições  
98 como quisermos e os elementos de  $A^C$  também podem ser permutados arbitrariamente, desde  
99 que tenhamos  $\pi^{-1}(x) > |A|, \forall x \notin A$ .

100 Portanto, temos que  $|A|!(n - |A|)!$  permutações em  $S_n$  podem ser compatíveis com um  $A \in \mathcal{A}$ .  
101 Avaliando a somatória em 2 temos:

$$\begin{aligned} T &= \sum_{A \in \mathcal{A}} \sum_{\pi \in S_n} \mathbb{1}\{A \text{ e } \pi \text{ são compatíveis}\} \\ &= \sum_{A \in \mathcal{A}} |A|!(n - |A|)!. \end{aligned}$$

102 Portanto

$$\sum_{A \in \mathcal{A}} |A|!(n - |A|)! = T \leq n!.$$

103 E então

$$\begin{aligned} \sum_{A \in \mathcal{A}} \frac{|A|!(n - |A|)!}{n!} &\leq 1; \text{ e} \\ \sum_{A \in \mathcal{A}} \binom{n}{|A|}^{-1} &\leq 1. \end{aligned}$$

104

□

105 Podemos também dar uma prova probabilística da desigualdade BLYM:

106 *Prova probabilística de BLYM.* Seja  $X$  a variável aleatória que representa quantos  $A \in \mathcal{A}$  são  
107 compatíveis com uma permutação  $\pi \in S_n$  fixa, ou seja,

$$X = \#\{A \in \mathcal{A} : A \text{ é compatível com } \pi\}.$$

108 Podemos também escrever  $X$  como uma soma de variáveis indicadoras:

$$X = \sum_{A \in \mathcal{A}} \mathbb{1}\{A \text{ e } \pi \text{ são compatíveis}\}.$$

109 Como para uma permutação fixa há no máximo um conjunto  $A \in \mathcal{A}$  compatível com ela,  
110 temos que:

$$\begin{aligned} 1 \geq \mathbb{E}[X] &= \mathbb{E}\left[\sum_{A \in \mathcal{A}} \mathbb{1}\{A \text{ e } \pi \text{ são compatíveis}\}\right] \\ &= \sum_{A \in \mathcal{A}} \mathbb{E}[\mathbb{1}\{A \text{ e } \pi \text{ são compatíveis}\}] \\ &= \sum_{A \in \mathcal{A}} \mathbb{P}(A \text{ compatível com } \pi) \\ &= \sum_{A \in \mathcal{A}} \frac{|A|! (n - |A|)!}{n!} \quad (\text{assumindo uma distribuição uniforme dos } \pi \text{ em } S_n) \\ &= \sum_{A \in \mathcal{A}} \binom{n}{|A|}^{-1}. \end{aligned}$$

111

□

## 112 1.2. O Teorema de Bollobás.

113 **Definição 6.** *Sejam  $A_1, \dots, A_m$  e  $B_1, \dots, B_m$  conjuntos finitos. Dizemos que eles formam um*  
114 *sistema de Bollobás se para todo  $i, j \in [m]$  temos  $A_i \cap B_j = \emptyset$  se, e somente se,  $i = j$ .*

115 **Teorema 7** (Teorema de Bollobás [2]). *Sejam  $A_1, \dots, A_m$  e  $B_1, \dots, B_m$  um sistema de Bollobás.*  
116 *Então vale que*

$$\sum_{i=1}^m \binom{|A_i| + |B_i|}{|A_i|}^{-1} \leq 1.$$

117 *Prova do T. de Bollobás – [14, 17].* Seja  $U = \bigcup_{i=1}^m A_i \cup \bigcup_{i=1}^m B_i$  e seja  $n = |U|$ . Vamos denotar  
118  $|A_i| = a_i$  e  $|B_i| = b_i$ .

119 Dizemos que uma permutação  $\pi \in S_n$  é compatível com um conjunto  $(A, B)$  se  $A <_{\pi} B$ , isto  
120 é, na ordenação imposta por  $\pi$ , todos os elementos de  $A$  aparecem antes de todos os elementos  
121 de  $B$ . Formalmente temos:

$$\max_{a \in A} \pi^{-1}(a) < \min_{b \in B} \pi^{-1}(b).$$

122 Definimos  $T = \#\{(\pi, i) : \pi \in S_n, i \in [m], (A_i, B_i) \text{ compatível com } \pi\}$ . Temos

$$T = \sum_{i=1}^m \sum_{\pi \in S_n} \mathbb{1}\{(A_i, B_i) \text{ compatível com } \pi\}.$$

123 Agora, fixando um par  $(A_i, B_i)$ , existem  $a_i! b_i! (n - a_i - b_i)! \binom{n}{a_i + b_i}$  permutações compatíveis  
 124 com ele. Isso ocorre pois temos  $a_i!$  maneiras de permutar os elementos de  $A_i$  antes dos elementos  
 125 de  $B_i$ ,  $b_i!$  maneiras de permutar os elementos de  $B_i$  depois dos de  $A_i$  e  $(n - a_i - b_i)!$  formas de  
 126 permutar os elementos que não estão em nenhum dos dois conjuntos. Além disso, temos  $\binom{n}{a_i + b_i}$   
 127 possíveis escolhas de posição para os elementos de  $A_i$  e  $B_i$ . Portanto

$$T = \sum_{i=1}^m a_i! b_i! (n - a_i - b_i)! \binom{n}{a_i + b_i}.$$

128 Temos também que

$$T = \sum_{\pi \in S_n} \sum_{i=1}^m \mathbb{1}\{(A_i, B_i) \text{ compatível com } \pi\}.$$

129 No máximo 1 par  $(A_i, B_i)$  do sistema de Bollobás pode ser compatível com uma permutação  
 130  $\pi$  fixa. Se tivéssemos  $(A_i, B_i)$  e  $(A_j, B_j)$  compatíveis com  $\pi$  valeria que  $\max_{a \in A_i} \pi^{-1}(a) <$   
 131  $\min_{b \in B_i} \pi^{-1}(b)$  e  $\max_{x \in A_j} \pi^{-1}(x) < \min_{y \in B_j} \pi^{-1}(y)$ . Contudo, como  $A_i \cap B_j \neq \emptyset$  e  $A_j \cap B_i \neq \emptyset$ ,  
 132 temos:

$$\max_{a \in A_i} \pi^{-1}(a) \geq \min_{y \in B_j} \pi^{-1}(y) > \max_{x \in A_j} \pi^{-1}(x) \geq \min_{b \in B_i} \pi^{-1}(b);$$

133 o que é um absurdo, dada a nossa definição de compatibilidade. Então

$$T = \sum_{\pi \in S_n} \sum_{i=1}^m \mathbb{1}\{(A_i, B_i) \text{ compatível com } \pi\} \leq \sum_{\pi \in S_n} 1 = n!.$$

134 Portanto:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m a_i! b_i! (n - a_i - b_i)! \binom{n}{a_i + b_i} &\leq n!; \text{ e} \\ \sum_{i=1}^m \frac{n!}{(a_i + b_i)! (n - (a_i + b_i))!} a_i! b_i! (n - a_i - b_i)! &\leq n!; \text{ e} \\ \sum_{i=1}^m \frac{a_i! b_i!}{(a_i + b_i)!} &\leq 1; \text{ e} \\ \sum_{i=1}^m \frac{a_i! (a_i + b_i - a_i)!}{(a_i + b_i)!} &\leq 1; \text{ e} \\ \sum_{i=1}^m \binom{a_i + b_i}{a_i}^{-1} &\leq 1. \end{aligned}$$

135

□

136 **Corolário 8.** Se a coleção  $(A_i, B_i)_{i=1}^m$  é Bollobás e para todo  $i$  temos  $|A_i| \leq a$  e  $|B_i| \leq b$ , então

$$m \leq \binom{a+b}{a}.$$

137 *Demonstração.* Do T. de Bollobás, temos:

$$\begin{aligned} 1 &\geq \sum_{i=1}^m \binom{|A_i| + |B_i|}{|A_i|}^{-1} \\ &\geq \sum_{i=1}^m \binom{a+b}{a}^{-1} \\ &= m \binom{a+b}{a}^{-1}. \end{aligned}$$

138 Portanto  $\binom{a+b}{a} \geq m$ .

□

139 A desigualdade de BLYM pode também ser vista como um corolário do Teorema de Bollobás:

140 *Demonstração (Bollobás  $\Rightarrow$  BLYM).* Seja  $\mathcal{A} \subset 2^{[n]}$  Sperner. Tomamos a coleção  $(A, A^C)$  para  
 141 todo  $A \in \mathcal{A}$ . Essa coleção será Bollobás, pois  $A \cap A^C = \emptyset$  e se  $B \in \mathcal{A}$  e  $B \neq A$ , temos  $A \cap B^C \neq \emptyset$ .  
 142 Essa última afirmação é verdadeira porque se tivéssemos  $A \cap B^C = \emptyset$ , valeria que  $A \subset B$ , o que  
 143 não pode acontecer dado que  $\mathcal{A}$  é Sperner.

144 Então, sejam  $m = |\mathcal{A}|$  e  $A_1, \dots, A_m$  os elementos de  $\mathcal{A}$ . Temos:

$$1 \geq \sum_{i=1}^m \binom{|A_i| + |A_i^C|}{|A_i|}^{-1} = \sum_{i=1}^m \binom{n}{|A_i|}^{-1} = \sum_{A \in \mathcal{A}} \binom{n}{|A_i|}^{-1}.$$

145

□

147 Vamos<sup>2</sup> agora ver uma aplicação do Teorema de Sperner. Para isso precisaremos introduzir  
 148 o nosso problema. Dizemos que uma sequência  $A = \{a_1 < a_2 < \dots\}$  de inteiros positivos é  
 149 primitiva se para todos índices  $i < j$ , temos que  $a_i \nmid a_j$ . Queremos saber o quão grande pode  
 150 ser essa sequência, mas para isso temos que achar um jeito convincente de medir grande em  
 151 sequências. Para isso definiremos a noção de densidade.

152 Seja  $A(x)$  o número de elementos de  $A$  menor que  $x$ , isto é,  $A(x) = \max\{k \in \mathbb{N} :: a_k \leq x\}$ .  
 153 Podemos definir a densidade natural inferior e superior de  $A$  da seguinte forma

$$\underline{d} = \underline{d}(A) = \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{A(x)}{x} = \liminf_{x \rightarrow \infty} f(x)$$

$$\bar{d} = \bar{d}(A) = \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{A(x)}{x} = \limsup_{x \rightarrow \infty} f(x)$$

154 onde  $f(x) = \frac{A(x)}{x}$ . Quando  $\bar{d} = \underline{d}$  chamamos esse valor de densidade natural ( $d = \bar{d} = \underline{d}$ ).

155 Outra maneira de medirmos a densidade de uma sequência é dada pela densidade logarítmica.  
 156 Podemos definir a densidade logarítmica inferior e superior de  $A$  da seguinte forma

$$\underline{\delta} = \underline{\delta}(A) = \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\sum_{a_i \leq x} \frac{1}{a_i}}{\ln(x)}$$

$$\bar{\delta} = \bar{\delta}(A) = \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\sum_{a_i \leq x} \frac{1}{a_i}}{\ln(x)}$$

157 quando  $\bar{\delta} = \underline{\delta}$  chamamos esse valor de densidade logarítmica ( $\delta = \bar{\delta} = \underline{\delta}$ ).

158 Podemos nos perguntar como esses valores se relacionam, o próximo teorema mostra que a  
 159 densidade logarítmica é um pouco mais precisa do que a natural

160 **Teorema 9.** *Dado  $A = \{a_1 < a_2 < \dots\}$  uma sequência de inteiros positivos, temos que*

$$\underline{d}(A) \leq \underline{\delta}(A) \leq \bar{\delta}(A) \leq \bar{d}(A).$$

161 Besicovitch (1934) provou que para qualquer  $0 \leq d < \frac{1}{2}$  existe uma sequência  $A$  primitiva  
 162 tal que  $\bar{d}(A) = d$ . Nós não iremos mostrar esse resultado aqui, mas mostraremos o outro lado,  
 163 que para toda sequência primitiva  $A$  vale que  $\underline{d}(A) = 0$ . Ou seja, que toda sequência primitiva  
 164 periodicamente sempre acaba ficando esparsa. Para isso vamos precisar do Teorema de Sperner  
 165 e de um lema auxiliar.

166 Antes de mais nada vamos introduzir alguma notação aqui. Dado  $n \in \mathbb{N}$  definimos  $d(n)$  como  
 167 o número de divisores de  $n$ ,  $\omega(n)$  como o número de divisores primos distintos de  $n$  e  $\Omega(n)$  o

<sup>2</sup>Notas produzidas por Bruno Pasqualotto Cavalari e Marcelo Sales

168 número de divisores primos de  $n$  contando multiplicidades. Por exemplo,  $d(12) = 6$ ,  $\omega(12) = 2$  e  
 169  $\Omega(12) = 3$ .

170 **Lema 10.** *Dado  $n \in \mathbb{N}$  temos*

$$\sum_{i=1}^n d(i) < 3n \ln(n).$$

171 *Demonstração.* Note que a soma da esquerda conta exatamente o número de pares  $(a, b)$  onde  
 172  $1 \leq a, b \leq n$  e  $a \mid b$  (Fixamos o  $b$ , o número de  $a$ 's é exatamente  $d(b)$ ). Agora podemos contar  
 173 isso de outra forma, fixando os  $a$ 's. Dado um  $a$  fixo, o número de múltiplos dele é  $\lfloor \frac{n}{a} \rfloor$ . Então  
 174 temos

$$\sum_{i=1}^n d(i) = \sum_{i=1}^n \lfloor \frac{n}{i} \rfloor \leq n \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \right) < 3n \ln(n)$$

175 □

176 O próximo resultado é a essência do que queremos

177 **Teorema 11.** *Dado  $A = \{a_1 < a_2 < \dots\}$  uma seqüência de inteiros positivos primitiva, temos*

$$\sum_{a_i \leq x} \frac{1}{a_i} = O\left(\frac{\ln(x)}{\sqrt{\ln \ln(x)}}\right).$$

178 *Demonstração.* Vamos dividir a prova em duas etapas. Na primeira etapa vamos supor que  
 179 todos os elementos da seqüência  $A$  são livres de quadrados. Dado um inteiro  $n$  definimos por  
 180  $r(n)$  o número de divisores de  $n$  em  $A$ . Se  $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_t^{\alpha_t}$ , definimos  $\tilde{n} = p_1 \dots p_t$ , ou seja, a  
 181 parte livre de quadrados de  $n$ .

182 Do fato de  $a_j$  ser livre de quadrado nós temos que  $a_j \mid n \Leftrightarrow a_j \mid \tilde{n}$ , ou seja,  $r(\tilde{n}) = r(n)$ .  
 183 Agora aplicaremos o Teorema de Sperner para determinar  $r(\tilde{n})$ . De fato, dado  $\tilde{n} = p_1 \dots p_t$   
 184 podemos associar  $\tilde{n}$  com  $[t]$  e cada divisor de  $\tilde{n}$  com um subconjunto de  $[t]$  de acordo com a  
 185 sua representação em primos. É fácil ver que nessa associação divisão corresponde a contido no  
 186 outro lado. Como  $r(\tilde{n})$  é o tamanho de um conjunto de divisores de  $\tilde{n}$  tal que nenhum divide o  
 187 outro, na nossa associação isso significa que  $r(\tilde{n})$  é o tamanho de uma família de Sperner. Logo  
 188 pelo Teorema de Sperner

$$r(n) = r(\tilde{n}) \leq \binom{\omega(\tilde{n})}{\lfloor \frac{\omega(\tilde{n})}{2} \rfloor} = \binom{\omega(n)}{\lfloor \frac{\omega(n)}{2} \rfloor}$$

189 Agora vamos contar o número de pares  $(a_i, n)$  onde  $1 \leq a_i, n \leq x$  e  $a_i \mid n$ . Existem duas  
 190 formas de contar: se fixarmos os  $n$ 's, para cada um deles temos exatamente  $r(n)$  valores de  $a_i$ 's

191 por definição. Se fixarmos os  $a'_i$ s, para cada um teremos  $\lfloor \frac{x}{a_i} \rfloor$  múltiplos. Assim

$$\sum_{a_i \leq x} \lfloor \frac{x}{a_i} \rfloor = \sum_{n \leq x} r(n) \leq \sum_{n \leq x} \left( \frac{\omega(n)}{\lfloor \frac{\omega(n)}{2} \rfloor} \right) = \sum_{n \leq x} O\left(\frac{2^{\omega(n)}}{\sqrt{\omega(n)}}\right)$$

192 onde usamos o fato conhecido que  $\left(\frac{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\right) = O\left(\frac{2^n}{\sqrt{n}}\right)$ .

193 Para terminarmos basta notar que a função  $\frac{2^x}{\sqrt{x}}$  é crescente, então

$$\sum_{a_i \leq x} \lfloor \frac{x}{a_i} \rfloor \leq \sum_{n \leq x} O\left(\frac{2^{\omega(n)}}{\sqrt{\omega(n)}}\right) = \sum_{\omega(n) \leq \ln \ln(x)} O\left(\frac{2^{\omega(n)}}{\sqrt{\omega(n)}}\right) + \sum_{\omega(n) \geq \ln \ln(x)} O\left(\frac{2^{\omega(n)}}{\sqrt{\omega(n)}}\right)$$

194 Temos

$$\sum_{\omega(n) \leq \ln \ln(x)} O\left(\frac{2^{\omega(n)}}{\sqrt{\omega(n)}}\right) \leq x O\left(\frac{2^{\ln \ln(x)}}{\sqrt{\ln \ln(x)}}\right) = O\left(\frac{x \ln(x)}{\sqrt{\ln \ln(x)}}\right)$$

195 e do fato que  $2^{\omega(n)} \leq d(n)$  também temos

$$\sum_{\omega(n) \geq \ln \ln(x)} O\left(\frac{2^{\omega(n)}}{\sqrt{\omega(n)}}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{\ln \ln(x)}} \sum_{n \leq x} O(d(n)) = O\left(\frac{x \ln(x)}{\sqrt{\ln \ln(x)}}\right)$$

196 pelo Lema 0.1.2. Assim segue que

$$x \sum_{a_i \leq x} \frac{1}{a_i} + O(1) = \sum_{a_i \leq x} \lfloor \frac{x}{a_i} \rfloor = O\left(\frac{x \ln(x)}{\sqrt{\ln \ln(x)}}\right) \Rightarrow \sum_{a_i \leq x} \frac{1}{a_i} = O\left(\frac{\ln(x)}{\sqrt{\ln \ln(x)}}\right)$$

197 Resta agora o caso em que a sequência  $A$  possui elementos que não são livre de quadrados.

198 Para isso vamos dividir  $A$  em subsequências primitivas  $A_k = \{a_{k1} < a_{k2} < \dots\}$  que consistem de

199 elementos da forma  $k^2 s$  onde  $s$  é um inteiro livre de quadrados, ou seja, o maior quadrado que

200 essa sequência possui é exatamente  $k^2$ . Assim podemos reescrever  $A_k = \{k^2 b_{k1} < k^2 b_{k2} < \dots\}$

201 onde  $B_k = \{b_{k1} < b_{k2} < \dots\}$  é uma sequência de inteiros positivos livre de quadrados e primitiva.

202 Aplicando o resultado anterior temos que

$$\sum_{b_{ki} \leq x} \frac{1}{b_{ki}} = O\left(\frac{\ln(x)}{\sqrt{\ln \ln(x)}}\right)$$

203 Logo

$$\sum_{a_i \leq x} \frac{1}{a_i} = \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{a_{ki} \leq x} \frac{1}{a_{ki}} = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{k^2} \sum_{b_{ki} \leq x} \frac{1}{b_{ki}} = O\left(\frac{\ln(x)}{\sqrt{\ln \ln(x)}}\right) \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{k^2} = O\left(\frac{\ln(x)}{\sqrt{\ln \ln(x)}}\right)$$

204 pois  $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$  que é constante. □

205 Por fim, do último teorema que provamos temos que se uma sequência  $A$  é primitiva então

$$\bar{\delta}(A) = \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\sum_{a_i \leq x} \frac{1}{a_i}}{\ln(x)} = \limsup_{x \rightarrow \infty} O\left(\frac{1}{\sqrt{\ln \ln(x)}}\right) = 0$$

206 e pelo Teorema 1 segue que  $\underline{d}(A) = 0$ .

### 207 §3. TEOREMAS DE INTERSECÇÃO

208 **3.1. Teorema de Erdős-Ko-Rado.** Nas<sup>3</sup> próximas seções falaremos de teoremas de intersec-  
209 ções. Estes teoremas normalmente perguntam qual é a maior família de  $\mathcal{P}([n])$  que possui todas  
210 as intersecções com cardinalidade pertencente a algum conjunto específico. Vamos começar com  
211 o caso mais fácil, o caso em que apenas pedimos que todos as intersecções não sejam vazias e  
212 que todos os conjuntos sejam uniformes.

213 Podemos notar algumas coisas deste caso. Se a família  $\mathcal{A}$  consiste de subconjuntos  $k$ -uniformes  
214 de  $[n]$ , então podemos supor que  $n \geq 2k$ . De fato, se  $n < 2k$  quaisquer dois subconjuntos de  
215 tamanho  $k$  possuem intersecção não vazia e assim o problema perde o interesse. Fixe  $x \in [n]$ .  
216 Definimos  $\mathcal{T}_x = \{\{x\} \cup Y :: Y \subset [n] \setminus \{x\}, |Y| = k - 1\}$ . É fácil ver que  $|\mathcal{T}_x| = \binom{n-1}{k-1}$  e que  
217 quaisquer dois elementos de  $\mathcal{T}_x$  se intersectam em  $x$ . O Teorema a seguir nos mostra que essa é  
218 a configuração máxima.

219 **Teorema 12** (Erdős-Ko-Rado). *Sejam  $n \geq 2k$  dois inteiros e  $\mathcal{A} \subset \binom{[n]}{k}$  uma família de conjuntos*  
220  *$k$ -uniformes satisfazendo que para todo  $A, B \in \mathcal{A}$  vale que  $A \cap B \neq \emptyset$ . Então*

$$|\mathcal{A}| \leq \binom{n-1}{k-1}.$$

221 *Além disso, se  $n > 2k$ , então a igualdade ocorre se, e somente se,  $\mathcal{A} = \mathcal{T}_x$  para algum  $x \in [n]$ .*

222 *Demonstração.* A prova de Erdős-Ko-Rado será semelhante a segunda prova usada para o  
223 Teorema de Sperner. Considere o espaço de todas as permutações de  $[n]$  e escolha uma permutação  
224  $\sigma$  uniformemente desse espaço. Dizemos que um par  $(A, \tau)$  de conjunto e permutação é compatível  
225 se existe  $i \in [n]$  tal que  $A = \{\tau(i+1), \dots, \tau(i+k)\}$ , onde os índices são vistos módulo  $n$  (e  
226 consideramos  $n$  como o representante da classe  $\bar{0}$ ). Seja  $X$  a variável aleatória que conta o  
227 número de pares  $(A, \sigma)$  que são compatíveis, com  $A \in \mathcal{A}$ .

228 A observação crítica é que fixado uma permutação  $\tau$  existem no máximo  $k$  conjuntos compati-  
229 veis com essa permutação. Seja  $C$  um conjunto qualquer compatível com a permutação e suponha  
230 que  $C = \{\tau(i+1), \dots, \tau(i+k)\}$ . Considere agora os conjuntos compatíveis que intersectam com

<sup>3</sup>Notas produzidas por Bruno Pasqualotto Cavalari e Marcelo Sales

231  $C$ . Podemos pareá-los da seguinte forma:  $(A_j, B_j)$  onde  $A_j = \{\tau(i + j + 1 - k), \dots, \tau(i + j)\}$  e  
 232  $B_j = \{\tau(i + j + 1), \dots, \tau(i + j + k)\}$  visto módulo  $n$ , para  $1 \leq j \leq k - 1$ . Como  $n \geq 2k$  temos  
 233 que  $A_j \cap B_j = \emptyset$ . Isso significa que desses pares apenas um dos elementos pode pertencer a  $\mathcal{A}$  e  
 234 logo existem no máximo  $k$  conjuntos compatíveis com  $\tau$ .

235 Da observação segue de imediato que  $X \leq k$ . Tomando esperança temos que

$$k \geq \mathbb{E}(X) = \sum_{A \in \mathcal{A}} \mathbb{P}((A, \sigma) \text{ compatível}) = |\mathcal{A}| \frac{k! (n - k)!}{(n - 1)!} \Rightarrow |\mathcal{A}| \leq \binom{n - 1}{k - 1}.$$

236 Agora suponha que a igualdade ocorra e que  $n > 2k$ . Isso significa que a igualdade deve  
 237 ocorrer em todos os passos da demonstração, isto é,  $\mathbb{E}(X) = k$ . Porém como  $X \leq k$ , é fácil ver  
 238 que para qualquer permutação  $\tau$  o número de pares compatíveis é exatamente  $k$  ( $X = k$ ). Então  
 239 considere uma permutação  $\tau$  qualquer e seja  $i$  um índice tal que  $\{\tau(i + 1), \dots, \tau(i + k)\} \in \mathcal{A}$ ,  
 240 porém  $\{\tau(i), \dots, \tau(i + k - 1)\} \notin \mathcal{A}$ . Esse índice existe porque caso contrário todos os conjuntos  
 241 com  $k$  índices consecutivos pertenceriam a  $\mathcal{A}$  e do fato que  $n \geq 2k$  segue que pelo menos dois  
 242 deles são disjuntos, o que é uma contradição.

243 Chame  $C = \{\tau(i + 1), \dots, \tau(i + k)\}$  e  $A_j, B_j$  como na demonstração,  $1 \leq j \leq k - 1$ . Por  
 244 existirem exatamente  $k$  conjuntos compatíveis em  $\tau$ , para cada par  $(A_j, B_j)$  um desses conjuntos  
 245 pertencem a  $\mathcal{A}$ . Do fato que  $A_{k-1} = \{\tau(i), \dots, \tau(i + k - 1)\} \notin \mathcal{A}$  segue que  $B_{k-1} \in \mathcal{A}$ . Isso nos faz  
 246 crer que um grande candidato a  $\mathcal{A}$  é  $\mathcal{T}_{\sigma(i+k)}$ . Observe que se  $B \in \mathcal{T}_{\sigma(i+k)}$  e  $B \subset [n] \setminus A_{k-1}$ , então  
 247  $B \in \mathcal{A}$ . Isso vem do fato que podemos aplicar o argumento acima para qualquer permutação  $\tilde{\tau}$   
 248 com  $\tilde{\tau}(i + j) = \tau(i + j)$  para  $0 \leq j \leq k$  e dessa maneira podemos achar  $\tilde{\tau}$  tal que  $B_{k-1} = B$ .

249 Porém uma análise um pouco mais precisa nos mostra que  $A_j \cap B_{j+1} = \emptyset$  (aqui usamos que  
 250  $n > 2k$ ). Assim, do fato que  $B_{k-1} \in \mathcal{A}$ , segue por indução que  $B_j \in \mathcal{A}$  para todo  $j$ . Também  
 251 podemos observar que em nenhum momento nos argumentos foi importante quais são os valores  
 252 de  $\tau(i + 1), \dots, \tau(i + k - 1)$  de forma que todo o argumento feito até aqui seria válido para  
 253 qualquer  $\tau$  que permutasse esses elementos (O conjunto  $C$  precisa ainda ser o mesmo). Logo,  
 254 podemos concluir que se  $B \in \mathcal{T}_{\sigma(i+k)}$  e  $B \subset [n] \setminus \{\tau(i)\}$ , então  $B \in \mathcal{A}$ .

255 Por fim, para eliminarmos o elemento  $\sigma(i)$  basta notar que  $\{\tau(i + k + 1), \dots, \tau(i + 2k)\} \notin \mathcal{A}$ , mas  
 256  $B_{k-1} = \{\tau(i + k), \dots, \tau(i + 2k - 1)\} \in \mathcal{A}$ . Assim podemos aplicar os argumentos feitos até agora  
 257 só que no sentido contrário (anti-horário) e conseguimos que se  $B \in \mathcal{T}_{\sigma(i+k)}$  e  $B \subset [n] \setminus \{\tau(i + 2k)\}$ ,  
 258 então  $B \in \mathcal{A}$ . Como  $n > 2k$  segue que  $\tau(i) \neq \tau(i + 2k)$  e daí  $\mathcal{A} = \mathcal{T}_{\sigma(i+k)}$ .  $\square$

259 Uma observação é que não existe unicidade da igualdade quando  $n = 2k$ . De fato, como  
 260  $\binom{2k-1}{k-1} = \frac{1}{2} \binom{2k}{k}$  podemos parear os conjuntos de  $\binom{[2k]}{k}$  em pares  $(A, B)$  com  $A \cap B = \emptyset$ . É fácil

261 ver que escolhendo um elemento de cada par temos uma família com intersecção não vazia.  
 262 Podemos fazer isso escolhendo  $[k]$ ,  $[k-1] \cup \{k+1\}$  e  $\{k, k+1, \dots, 2k-1\}$  na mesma família.  
 263 Esses três conjuntos não possuem um elemento em comum e logo não são equivalentes a um  $\mathcal{T}_x$ .

264 Podemos agora passar para o caso em que pedimos que a intersecção seja de pelo menos  
 265 algum tamanho  $t$  definido. Chamamos famílias desse tipo de famílias  $t$ -intersectantes. De forma  
 266 semelhante ao caso anterior, definimos para um  $X \subset [n]$  com  $|X|=t$  a família  $\mathcal{T}_X = \{X \cup Y : Y \subset [n] \setminus X, |Y|=k-t\}$ . É fácil ver que quaisquer dois subconjuntos de  $\mathcal{T}_X$  possuem  $X$  como  
 268 intersecção e que  $|\mathcal{T}_X| = \binom{n-t}{k-t}$ . Erdős, Ko e Rado também obtiveram uma generalização do  
 269 teorema anterior, que segue adiante

270 **Teorema 13** (Erdős-Ko-Rado Generalizado). *Sejam  $n > k > t > 0$  inteiros e  $\mathcal{A} \subset \binom{[n]}{k}$  uma*  
 271 *família de conjuntos tal que para todo  $A, B \in \mathcal{A}$ , temos  $|A \cap B| \geq t$ . Se  $t \geq 2$ , existe um*  
 272  *$n_0 := n_0(k, t)$  tal que para todo  $n > n_0$  vale*

$$|\mathcal{A}| \leq \binom{n-t}{k-t}$$

273 *Além disso, para  $n$  suficientemente grande a igualdade ocorre se, e somente se,  $\mathcal{A} = \mathcal{T}_X$  para*  
 274 *algum  $X \in \binom{[n]}{t}$ .*

275 *Demonstração.* Suponha inicialmente que existe um  $X \in \binom{[n]}{t}$  tal que, para todo  $A \in \mathcal{A}$ , vale  
 276  $X \subset A$ . Neste caso é óbvio que  $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}_X$  e o resultado segue.

277 Agora suponha o contrário. Afirmamos que existe um conjunto  $B$  com  $|B| < 3k$  tal que  
 278  $|B \cap A| \geq t+1$ , para todo  $A \in \mathcal{A}$ . Se para todo  $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$  vale que  $|A_1 \cap A_2| \geq t+1$ , então é  
 279 fácil, basta tomar  $B = A$  para algum  $A \in \mathcal{A}$ . Caso contrário, existem de fato  $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$  tal  
 280 que  $|A_1 \cap A_2| = t$ . Tome um  $A_3 \in \mathcal{A}$  diferente desses dois com  $A_1 \cap A_2 \not\subset A_3$ , ele existe pois  
 281 como já vimos não existe um conjunto  $t$ -uniforme contido em todos os elementos de  $\mathcal{A}$ . Então  
 282  $B = A_1 \cup A_2 \cup A_3$  deve servir. Primeiro note que  $|B| < |A_1| + |A_2| + |A_3| = 3k$  (pois  $A_1, A_2$  e  $A_3$   
 283 possuem intersecções). Dado  $A \in \mathcal{A}$  temos duas possibilidades: A primeira é que  $A_1 \cap A_2 \subset A$ ,  
 284 neste caso a intersecção com  $B$  já é de pelo menos  $t$  elementos, mas como  $|A \cap A_3| \geq t$  não  
 285 podemos ter  $B \cap A = A_1 \cap A_2$  e portanto  $|B \cap A| \geq t+1$ . A segunda possibilidade é que  
 286  $A_1 \cap A_2 \not\subset A$ , neste caso o fato de que  $|A \cap A_i| \geq t$  mostra que se  $|A \cap A_1 \cap A_2| = p$  então  
 287  $|(A_1 \cup A_2) \cap A| \geq 2k - p \geq k+1$  pois  $p < k$ .

288 Logo podemos limitar os possíveis conjuntos de  $\mathcal{A}$ . Um conjunto de  $\mathcal{A}$  consiste de pelo menos  
 289  $t + 1$  elementos em  $B$  e o restante pode estar em qualquer lugar, assim

$$|\mathcal{A}| < \binom{|B|}{t+1} \binom{n}{k-t-1} < \binom{3k}{t+1} \binom{n}{k-t-1}$$

290 que é um polinômio de grau  $k - t - 1$  em  $n$ . Como  $\binom{n-t}{k-t}$  é um polinômio de grau  $k - t$  em  $n$ ,  
 291 então para  $n$  suficientemente grande temos que  $|\mathcal{A}| < \binom{n-t}{k-t}$ . Na verdade isso mostra que nesse  
 292 caso o tamanho de  $\mathcal{A}$  é assintoticamente menor do que  $\binom{n-t}{k-t}$  para  $n$  suficientemente grande e  
 293 assim a única forma de conseguirmos a igualdade é se valer o primeiro parágrafo. Isto é,  $\mathcal{A} = \mathcal{T}_X$   
 294 para algum  $X \in \binom{[n]}{k}$ .  $\square$

295 Para encerrar, vamos dar um exemplo de que o teorema pode não valer para valores lineares  
 296 em  $k$  e  $t$ .

297 **Exemplo 14.** Vamos exibir um exemplo de uma família  $\mathcal{A} \in \binom{[4s]}{2s}$ , 2-intersectante, de cardinali-  
 298 dade grande. Particione  $[4s]$  em  $X = [2s]$  e  $Y = [4s] \setminus X$ . Considere a família

$$\mathcal{A} = \left\{ A \in \binom{[4s]}{2s} :: |A \cap X| \geq s + 1 \right\}$$

299 É fácil ver que essa família é 2-intersectante. De fato, se  $A, B \in \mathcal{A}$  temos que  $A$  e  $B$  possuem  
 300  $s + 1$  elementos cada em  $X$  (que possui  $2s$  elementos). Logo  $|A \cap B \cap X| \geq (s + 1) + (s + 1) - s = 2$ .  
 301 Resta calcular quantos elementos existem em  $\mathcal{A}$ .

302 Uma simples contagem nos mostra que

$$|\mathcal{A}| = \sum_{i=s+1}^{2s} \binom{2s}{i} \binom{2s}{2s-i} = \sum_{i=0}^{s-1} \binom{2s}{i}^2$$

303 Agora observe que todo elemento de  $\binom{[4s]}{2s}$  pode ser escolhido da seguinte forma: Primeiro  
 304 escolhemos  $i$  elementos de  $X$  e depois  $2s - i$  elementos de  $Y$ . Assim

$$\binom{4s}{2s} = \sum_{i=0}^{2s} \binom{2s}{i} \binom{2s}{2s-i} = \sum_{i=0}^{2s} \binom{2s}{i}^2$$

305 Daí concluímos que

$$\binom{4s}{2s} = \sum_{i=0}^{s-1} \binom{2s}{i}^2 + \binom{2s}{s}^2 + \sum_{i=s+1}^{2s} \binom{2s}{i}^2 = 2|\mathcal{A}| + \binom{2s}{s}^2$$

306 e

$$|\mathcal{A}| = \left( \frac{1}{2} - \epsilon(s) \right) \binom{4s}{2s}$$

307 onde  $\epsilon(s) = \frac{\binom{2s}{s}^2}{\binom{4s}{2s}}$ . Usando que  $\binom{n}{\frac{n}{2}} \sim \frac{2^n}{\sqrt{n}}$  temos

$$\epsilon(s) = \frac{\binom{2s}{s}^2}{\binom{4s}{2s}} \sim \frac{\frac{2^{4s}}{\sqrt{4s}}}{\frac{2^{4s}}{\sqrt{4s}}} = \frac{1}{\sqrt{s}} \rightarrow 0$$

308 quando  $s$  vai para o infinito. Porém o Teorema de Erdős-Ko-Rado nos daria

$$|\mathcal{A}| \leq \binom{4s-2}{2s-2} \sim \frac{1}{4} \binom{4s}{2s}$$

309 que é menor do que o tamanho dado pelo exemplo.

310 **3.2. Teorema de Katona.** Nesta<sup>4</sup> seção falaremos do mesmo problema tratado pelos teoremas  
 311 de Erdős, Ko e Rado, porém não pediremos aqui a  $k$ -uniformidade. Assim o problema é o  
 312 seguinte: Qual é a maior família  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}([n])$ , que é  $t$ -intersectante? ( $t \geq 1$ ). Para o caso  $t = 1$   
 313 podemos resolver facilmente o problema. Fixando um  $x \in [n]$  podemos construir a família  
 314  $\mathcal{T}_x = \{\{x\} \cup Y :: Y \subset [n] \setminus \{x\}\}$  de forma semelhante a da seção anterior. É fácil ver que quaisquer  
 315 dois elementos de  $\mathcal{T}_x$  possuem  $x$  como elemento comum e que  $|\mathcal{T}_x| = 2^{n-1}$ . Podemos observar  
 316 que esse valor é máximo se parearmos todos os conjuntos de  $\mathcal{P}([n])$  com seus complementares.  
 317 Nesse pareamento, um conjunto 1-intersectante pode pegar apenas um elemento de cada par e  
 318 assim no máximo metade de todos os subconjuntos, que é  $2^n$ .

319 Para o caso  $t > 1$  a solução não é tão agradável como antes. Suponha que  $n + t = 2a$  para  
 320 algum  $a > 0$  inteiro. Então se dois conjuntos  $A$  e  $B$  forem tais que  $|A|, |B| \geq a$ , temos que  
 321  $|A \cap B| \geq |A| + |B| - n = 2a - n = t$ . Portanto a família  $\mathcal{K} = \{A \in \binom{[n]}{k} :: k \geq a\}$  é uma família  
 322  $t$ -intersectante e  $|\mathcal{K}| = \sum_{k \geq a} \binom{n}{k}$ . Agora se  $n + t = 2a + 1$  para algum  $a > 0$  inteiro, então  
 323 se  $A$  e  $B$  forem tais que  $|A|, |B| \geq a + 1$  temos que  $|A \cap B| \geq 2(a + 1) - n = t + 1$ , porém se  
 324  $|A|, |B| \geq a$  segue que  $|A \cap B| \geq 2a - n = t - 1$ . Felizmente se  $|A| \geq a$  e  $|B| \geq a + 1$ , então  
 325  $|A \cap B| \geq 2a + 1 - n = t$ , ou seja, podemos escolher alguns elementos de tamanho  $a$ . É fácil  
 326 ver que se escolhermos esses conjuntos de tamanho  $a$  como subconjuntos de um conjunto de  
 327 tamanho  $n - 1$ , então pelo primeiro caso teríamos que eles seriam  $t$ -intersectantes. Assim a  
 328 família  $\mathcal{K}_x = \{A \in \binom{[n]}{k} :: k \geq a + 1\} \cup \binom{[n] \setminus \{x\}}{a}$  é  $t$ -intersectante e  $|\mathcal{K}_x| = \binom{n-1}{a} + \sum_{k \geq a+1} \binom{n}{k}$ .  
 329 Essas famílias apresentadas são chamadas de famílias de Katona, e o próximo teorema nos diz  
 330 que elas são as soluções extremais para o nosso problema.

331 **Teorema 15** (Katona). *Suponha que  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}([n])$  é  $t$ -intersectante,  $n \geq t \geq 1$ . Então uma das*  
 332 *duas vale*

<sup>4</sup>Notas produzidas por Bruno Pasqualotto Cavalari e Marcelo Sales

333 (1)  $n + t = 2a$  e

$$|\mathcal{A}| = \sum_{k \geq a} \binom{n}{k}$$

334 (2)  $n + t = 2a + 1$  e

$$|\mathcal{A}| = \binom{n-1}{a} + \sum_{k \geq a+1} \binom{n}{k}$$

335 Além disso, se  $t \geq 2$ , então as famílias que atingem a igualdade são as famílias de Katona.

336 Para provarmos o teorema acima vamos introduzir uma técnica nova, chamada de shifting.

337 Para  $1 \leq i < j \leq n$  defina a operação de shifting  $s_{ij} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{P}([n])$  dada por

$$s_{ij}(A) = \begin{cases} (A \setminus \{j\}) \cup \{i\} & \text{se } i \notin A, j \in A \text{ e } (A \setminus \{j\}) \cup \{i\} \notin \mathcal{A} \\ A & \text{caso contrário} \end{cases}$$

338 e defina  $s_{ij}(\mathcal{A}) = \{s_{ij}(A) :: A \in \mathcal{A}\}$ . A primeira coisa que precisaremos saber sobre essa operação

339 é

340 **Lema 16.** Se  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}([n])$  é uma família  $t$ -intersectante, então  $s_{ij}(\mathcal{A})$  é  $t$ -intersectante, para

341 todo  $1 \leq i < j \leq n$ .

342 *Demonstração.* Antes de mais nada, vamos tentar entender a operação de outra forma. Dado

343 uma família  $\mathcal{A}$  definimos

$$\mathcal{A}(i, j) = \{A \setminus \{i, j\} :: A \in \mathcal{A}, \{i, j\} \subset A\}$$

$$\mathcal{A}(\bar{i}, j) = \{A \setminus \{i\} :: A \in \mathcal{A}, i \notin A, j \in A\}$$

$$\mathcal{A}(i, \bar{j}) = \{A \setminus \{j\} :: A \in \mathcal{A}, i \in A, j \notin A\}$$

$$\mathcal{A}(\bar{i}, \bar{j}) = \{A :: A \in \mathcal{A}, i \notin A, j \notin A\}$$

344 Esses 4 conjuntos identificarm  $\mathcal{A}$  de maneira biunívoca. Se considerarmos  $\mathcal{B} = s_{ij}(\mathcal{A})$ , uma

345 simples conferência nos mostra que

$$\mathcal{B}(i, j) = \mathcal{A}(i, j)$$

$$\mathcal{B}(\bar{i}, j) = \mathcal{A}(\bar{i}, j) \cap \mathcal{A}(i, \bar{j})$$

$$\mathcal{B}(i, \bar{j}) = \mathcal{A}(\bar{i}, j) \cup \mathcal{A}(i, \bar{j})$$

$$\mathcal{B}(\bar{i}, \bar{j}) = \mathcal{A}(\bar{i}, \bar{j})$$

346 Agora é apenas checar os casos, por exemplo, suponha que  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$  e  $B_1$  corresponde a um  
347 elemento  $Y_1 \in \mathcal{B}(\bar{i}, j)$  e  $B_2$  corresponde a um elemento  $Y_2 \in \mathcal{B}(i, \bar{j})$ . Logo  $Y_1 \in \mathcal{A}(\bar{i}, j) \cap \mathcal{A}(i, \bar{j})$  e  
348  $Y_2 \in \mathcal{A}(\bar{i}, j) \cup \mathcal{A}(i, \bar{j})$ . Podemos supor sem perda de generalidade que  $Y_1 \in \mathcal{A}(i, \bar{j})$  e  $Y_2 \in \mathcal{A}(\bar{i}, j)$   
349 e logo do fato de  $|(Y_1 \cup \{i\}) \cap (Y_2 \cup \{j\})| \geq t$  (pois  $\mathcal{A}$  é  $t$ -intersectante) segue que  $|Y_1 \cap Y_2| \geq t$  e  
350 logo  $|B_1 \cap B_2| \geq t$ . Os outros casos são semelhantes e não demonstrarei.  $\square$

351 Dizemos que uma família  $\mathcal{A}$  está *comprimida*, se para todo  $1 \leq i < j \leq n$  vale que  $s_{ij}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$ .  
352 É fácil ver que após um número finito de operações de shift podemos transformar uma família  
353 arbitrária em uma família comprimida. Para isso vamos argumentar usando o semi invariante  
354  $E(A) := \sum_{k \in A} k$  para todo  $A \subset [n]$  e definimos  $E(\mathcal{A}) = \sum_{A \in \mathcal{A}} E(A)$ . A observação crucial é  
355 que  $E(s_{ij}(A)) < E(A)$  para todo  $A \subset [n]$  e  $1 \leq i < j \leq n$  tal que  $s_{ij}(A) \neq A$ . Logo aplicar  $s_{ij}$  a  
356  $\mathcal{A}$  diminui o valor do invariante  $E$  se  $s_{ij}(\mathcal{A}) \neq \mathcal{A}$ , então só podemos aplicar um número finito de  
357 operações shifts (pois  $E$  sempre é positiva e finita).

358 Agora famílias comprimidas são interessantes por causa do seguinte lema. Seja  $\mathcal{A}(i) = \{A \setminus \{i\} :$   
359  $: A \in \mathcal{A}, i \in A\}$  e  $\mathcal{A}(\bar{i}) = \{A :: A \in \mathcal{A}, i \notin A\}$ .

360 **Lema 17.** *Se  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}([n])$  é uma família comprimida e  $t$ -intersectante ( $t > 1$ ), então  $\mathcal{A}(1)$  é*  
361  *$(t - 1)$ -intersectante e  $\mathcal{A}(\bar{1})$  é  $(t + 1)$ -intersectante.*

362 *Demonstração.*  $\mathcal{A}(1)$  é  $(t - 1)$ -intersectante simplesmente porque  $\mathcal{A}$  é  $t$ -intersectante e retiramos  
363 no máximo um elemento. Sejam  $A, B \in \mathcal{A}(\bar{1})$ , note que  $A, B \in \mathcal{A}$  também. Suponha que  
364  $|A \cap B| < t + 1$ , então do fato de  $\mathcal{A}$  ser  $t$ -intersectante segue que  $|A \cap B| = t$ . Seja  $j \in A \cap B$   
365 um elemento qualquer. Tome  $B' = (B \cup \{1\}) \setminus \{j\}$ . Como  $\mathcal{A}$  está comprimido é fácil ver que  
366  $s_{1j}(B) = B$  o que implica que  $B' \in \mathcal{A}$ . Porém daí temos que  $|A \cap B'| = t - 1$ , absurdo!  $\square$

367 Agora podemos usar essas famílias comprimidas para provarmos o teorema de Katona por  
368 indução

369 *Demonstração do Teorema 0.3.1.* Façamos por indução em  $n$ . A nossa hipótese de indução é de  
370 que para  $n$  o teorema vale para toda família  $t$ -intersectante comprimida e nesse caso a igualdade  
371 ocorre se a família for  $\mathcal{K}$  ou  $\mathcal{K}_n$  (dependendo da paridade do caso). Se  $n = t$  ou  $n = t + 1$  é  
372 fácil verificar que a hipótese é verdadeira. Agora suponha que até  $n - 1$  a hipótese é verdadeira,  
373 vamos provar para  $n$ . Seja  $\mathcal{A}$  nossa família. Vamos dividir nos dois casos.

374 Suponha que  $n + t = 2a$ . Como  $\mathcal{A}$  é comprimida, então pelo lema 0.3.3.  $\mathcal{A}(1)$  é  $(t - 1)$   
375 intersectante e é uma família de  $\mathcal{P}(\{2, \dots, n\})$ . Assim do fato que  $n - 1 + t - 1 = 2(a - 1)$  por

376 hipótese de indução

$$|\mathcal{A}(1)| \leq \sum_{k \geq a-1} \binom{n-1}{k}$$

377 Também pelo lema temos que  $\mathcal{A}(\bar{1})$  é  $(t+1)$ -intersectante e é uma família de  $\mathcal{P}(\{2, \dots, n\})$ .

378 Como  $n-1+t+1=2a$ , por indução segue que

$$|\mathcal{A}(\bar{1})| \leq \sum_{k \geq a} \binom{n-1}{k}$$

379 Juntando os dois temos

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}| &= |\mathcal{A}(1)| + |\mathcal{A}(\bar{1})| = \sum_{k \geq a-1} \binom{n-1}{k} + \sum_{k \geq a} \binom{n-1}{k} = \\ &= \sum_{k \geq a} \left( \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \right) + \binom{n-1}{n-1} = \sum_{k \geq a} \binom{n}{k} \end{aligned}$$

380 Caso ocorra igualdade então as igualdades também devem ocorrer para  $\mathcal{A}(1)$  e  $\mathcal{A}(\bar{1})$ . Por hipótese  
381 de indução  $\mathcal{A}(1) = \{A \in \mathcal{P}([n] \setminus \{1\}) : |A| \geq a-1\}$  e  $\mathcal{A}(\bar{1}) = \{A \in \mathcal{P}([n] \setminus \{1\}) : |A| \geq a\}$ . Logo  
382  $\mathcal{A} = \mathcal{K}$ . Aqui usamos o fato que  $\mathcal{A}(1)$  e  $\mathcal{A}(\bar{1})$  são famílias comprimidas em  $\mathcal{P}([n] \setminus \{1\})$ , o que  
383 não é muito difícil de ver (caso não fossem  $\mathcal{A}$  também não seria). O caso  $n+t=2a+1$  é  
384 praticamente análogo e não repetiremos a demonstração.

385 Suponha que inicialmente temos uma família  $\mathcal{A}$  que é  $t$ -intersectante e aplicamos as operações  
386 de shift até ela ser uma família  $\mathcal{B}$  comprimida, pelo lema 0.3.2. temos que  $\mathcal{B}$  é  $t$ -intersectante.  
387 Como as operações de shift não mudam a cardinalidade das famílias então imediatamente  
388 obtemos as desigualdades para qualquer família  $t$ -intersectante. Basta ver os casos de igualdade.  
389 Se  $n+t=2a$  pelo trabalho anterior temos que  $\mathcal{B} = \mathcal{K}$ . Agora note que a operação de shift não  
390 altera o tamanho de um conjunto da família. Como  $\mathcal{K}$  possui todos os conjuntos de tamanho  
391 pelo menos  $a$ , é fácil ver que a única família em que a operação shift leva a  $\mathcal{K}$  é a própria  $\mathcal{K}$ .  
392 Logo  $\mathcal{A} = \mathcal{K}$ .

393 O caso  $n+t=2a+1$  é um pouco mais complicado. Sabemos que  $\mathcal{B} = \mathcal{K}_n$ . Pelo mesmo  
394 argumento acima sabemos que os conjuntos de tamanho pelo menos  $a+1$  só podem ter vindo  
395 da mesma subfamília. Mas não sabemos de onde veio a subfamília  $\binom{[n-1]}{a}$ . Vamos mostrar que  
396 ela só pode ter vindo de uma família  $\binom{[n] \setminus \{x\}}{a}$  para algum  $x \in [n]$  e logo  $\mathcal{A} = \mathcal{K}_x$ . Seja  $s_{in}$  a  
397 última operação de shift aplicada (É fácil ver que podemos descartar  $s_{ij}$  com  $j < n$  como última  
398 pois essa operação em nada alteraria o conjunto). Seja  $\mathcal{Q}$  a família tal que  $s_{in}(\mathcal{Q}) = \binom{[n-1]}{a}$ .  
399 Podemos classificar a diferença de  $\mathcal{Q}$  e  $\binom{[n-1]}{a}$  da seguinte forma: Considere  $\binom{[n] \setminus \{i,n\}}{a-1}$ . Para

400 alguns desses conjuntos adicione  $i$ , para outros adicione  $n$ .  $\binom{[n-1]}{a}$  é a família obtida adicionando  
401  $i$  para todos os conjuntos,  $\mathcal{Q}$  é alguma família obtida adicionando de outra forma. Queremos  
402 mostrar que na verdade ela é a família obtida adicionando  $n$  para todos os conjuntos. Suponha  
403 que exista um conjunto  $A \in \mathcal{Q}$  obtido adicionando  $i$  e um  $B \in \mathcal{Q}$  obtido adicionando  $n$ . Em  
404  $\binom{[n] \setminus \{i, n\}}{a-1}$  a interseccção de quaisquer dois conjuntos tem tamanho  $2a - 2 - (n - 2) = t - 1$   
405 e logo  $|A \cap B| = t - 1$ , o que contradiz  $\mathcal{Q}$  ser  $t$ -intersectante. Assim  $\mathcal{Q} = \binom{[n] \setminus \{i\}}{a}$ . Podemos  
406 continuar aplicando esse raciocínio voltando até  $\mathcal{A} \cap \binom{[n]}{a}$  por meio das operações  $s_{ij}$ . De forma  
407 análoga a mostrada aqui, para cada uma dessas voltas obteremos uma família da forma  $\binom{[n] \setminus \{x\}}{a}$ ,  
408 concluindo a demonstração.  $\square$

#### 409 §4. TEOREMAS DE INTERSEÇÃO E APLICAÇÕES GEOMÉTRICAS

##### 410 4.1. Variantes do teorema de Ray-Chaudhuri–Wilson. <sup>5</sup>

411 **Definição 18** (Família  $L$ -intersectante). *Seja  $\mathcal{A} \subset 2^{[n]}$  e seja  $L \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}$  um conjunto finito.*  
412 *Dizemos que  $\mathcal{A}$  é  $L$ -intersectante se para todo par de conjuntos distintos  $A, B \in \mathcal{A}$  temos que*  
413  *$|A \cap B| \in L$ .*

414 **Teorema 19** (RW uniforme – Ray-Chaudhuri–Wilson '75 [21]). *Se  $\mathcal{A} \subset \binom{[n]}{k}$  é  $L$ -intersectante*  
415 *com  $|L| = s$ , então*

$$|\mathcal{A}| \leq \binom{n}{s}. \quad (3)$$

416 **Teorema 20** (RW não-uniforme – Frankl–Wilson '81 [12]). *Se  $\mathcal{A} \subset 2^{[n]}$  é  $L$ -intersectante com*  
417  *$|L| = s$ , então*

$$|\mathcal{A}| \leq \sum_{i=0}^s \binom{n}{i} \leq 2 \binom{n}{s}. \quad (4)$$

418 Essas duas cotas são justas: No caso da cota 3, podemos tomar  $\mathcal{A} = \binom{[n]}{s}$  e  $L = \{0, \dots, s - 1\}$ .  
419 Para a cota 4, tomamos  $\mathcal{A} = \binom{[n]}{k}$  e  $L = \{0, \dots, s - 1\}$ , onde  $k \leq s$ .

420 Agora apresentaremos versões modulares para os teoremas acima.

421 Denotaremos por  $\mathbb{Z}_n$  o conjunto dos resíduos módulo  $n$ .

422 **Definição 21** (Família  $L$ -intersectante modular). *Seja  $p$  um primo e  $L \subset \mathbb{Z}_p$ . Dizemos que  $\mathcal{A}$*   
423 *é  $L$ -intersectante módulo  $p$  se para todo par de conjuntos distintos  $A, B \in \mathcal{A}$  temos*

- 424 •  $|A| \notin L \pmod{p}$ , para todo  $A \in \mathcal{A}$ ; e
- 425 •  $|A \cap B| \in L \pmod{p}$ , para todo par  $A, B \in \mathcal{A}$  distintos.

<sup>5</sup>Notas produzidas por Gervásio Santos e Felix Liu.

426 **Teorema 22** (RW uniforme modular – Frankl–Wilson '81 [12]). *Seja  $p$  um primo e  $L \subset \mathbb{Z}_p$ . Se*  
 427  *$\mathcal{A} \subset \binom{[n]}{k}$  é  $L$ -intersectante módulo  $p$  com  $|L|=s$ , então*

$$|\mathcal{A}| \leq \binom{n}{s}. \quad (5)$$

428 **Teorema 23** (RW não-uniforme modular – Deza, Frankl & Singhi '83 [6]). *Se  $\mathcal{A} \subset 2^{[n]}$  é*  
 429  *$L$ -intersectante módulo  $p$ , então*

$$|\mathcal{A}| \leq \sum_{i=0}^s \binom{n}{i} \leq 2 \binom{n}{s}. \quad (6)$$

430 Essas duas cotas também são justas.

431 Há uma prova para o teorema 20 por Alon, Babai e Suzuki [1] que, com alguns ajustes, pode  
 432 ser usada para provar o teorema 23.

433 *Prova do Teorema 23.* Sejam  $p$  um número primo,  $L = \{l_1, \dots, l_s\} \subset \mathbb{Z}_p$  um conjunto de resíduos  
 434 módulo  $p$  e  $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_m\} \subset 2^{[n]}$  uma família  $L$ -intersectante módulo  $p$ . Para cada  $A_i$ ,  
 435 associamos seu vetor característico  $v_i = (v_{i1}, \dots, v_{in})$ , onde

$$v_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } j \in A_i; \text{ ou} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

436 Para  $1 \leq i \leq m$ , definimos o polinômio  $f_i$  em  $n$  variáveis da seguinte forma:

$$f_i(x) = \prod_{\ell \in L} (\langle v_i, x \rangle - \ell) \pmod{p},$$

437 onde  $x \in \mathbb{F}^n$  e  $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ . Observe que  $\langle v_i, v_j \rangle = |A_i \cap A_j|$ . Assim, temos que  $f_i(v_i) \neq 0$ ,  
 438 uma vez que  $|A_i| \notin L \pmod{p}$  para todo  $A_i \in \mathcal{A}$ ; e  $f_i(v_j) = 0$  para todo  $i \neq j$ , uma vez que  
 439  $|A_i \cap A_j| \in L \pmod{p}$ .

440 Um polinômio é *multilinear* se o seu grau em cada variável é no máximo 1. No domínio do  
 441  $n$ -cubo  $\Omega = \{0, 1\}^n$ , os polinômios  $f_i$  acima possuem um correspondente multilinear: como para  
 442 toda variável  $x \in \Omega$  vale que  $x^2 = x$ , basta expandir os polinômios como somas de monômios e  
 443 então diminuir o expoente de toda variável ocorrente para 1.

444 Afirmamos que os polinômios  $f_1, \dots, f_m$  como funções de  $\{0, 1\}^n$  para  $\mathbb{Z}$  são linearmente  
 445 independentes. Para mostrar isso, assumamos o contrário. Nesse caso,  $\sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x) = 0$  é uma  
 446 relação não trivial pra alguma escolha de constantes  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ . Seja  $i'$  o menor índice tal que  
 447  $\lambda_{i'}$  não é zero e substitua  $x$  por  $v_{i'}$  nessa relação. Para todo  $i \neq i'$ , temos que  $f_i(v_{i'}) = 0$ . Assim,

448 apenas o termo  $\lambda_{i'} f_{i'}(v_{i'})$  permanece no somatório. Como  $f_{i'}(v_{i'}) \neq 0$ , concluímos que  $\lambda_{i'} = 0$ ,  
 449 uma contradição.

450 Enfim, cada  $f_i$  pode ser escrito como uma combinação linear de monômios multilineares de grau  
 451 no máximo  $s$ . Há  $\sum_{i=0}^s \binom{n}{i}$  desses monômios, de onde concluímos que  $m = |\mathcal{A}| \leq \sum_{i=0}^s \binom{n}{i}$ .  $\square$

452 Através desse teorema, podemos provar a seguinte cota para o caso do teorema 19:

453 **Corolário 24.** *Se  $\mathcal{A} \subset \binom{[n]}{k}$  é  $L$ -intersectante com  $|L| = s$ , então*

$$|\mathcal{A}| \leq \sum_{i=0}^s \binom{n}{i} \leq 2 \binom{n}{s}. \quad (7)$$

454 *Demonstração.* Suponha sem perda de generalidade que  $L \subset \{0, \dots, k-1\}$ . Basta tomar para  
 455  $p$  um primo maior que  $k$  no teorema 23.  $\square$

456 Enfim, vejamos o seguinte exemplo, em que aplicamos o teorema 23.

457 **Corolário 25** (Uma interseção proibida modular). *Sejam  $p$  um primo,  $n = 4p - 1$  e  $\mathcal{A} \subset \binom{[n]}{2p-1}$   
 458 tal que para todo par  $A, B \in \mathcal{A}$  distintos temos que  $|A \cap B| \neq p - 1$ . Então*

$$|\mathcal{A}| \leq 2 \binom{4p-1}{p-1} < 1.7548^{4p-1}. \quad (8)$$

459 *Demonstração.* Tome  $L = \{0, \dots, p-2\}$  no teorema 23. Então as seguintes afirmações são  
 460 verdadeiras para todo  $A, B \in \mathcal{A}$  distintos:

461 (1)  $|A| \not\equiv L \pmod{p}$ , porque  $|A| = 2p - 1 \equiv p - 1 \pmod{p}$ ; e

462 (2)  $|A \cap B| \in \{0, \dots, 2p-1\} \setminus \{p-1, 2p-1\} \equiv L \pmod{p}$ .

463 Assim, podemos aplicar o teorema 23, de onde obtemos  $|\mathcal{A}| \leq 2 \binom{4p-1}{p-1}$ . Para se obter o  
 464 resultado numérico, basta observar que  $p-1 \leq \frac{4p-1}{4}$ .  $\square$

465 Seja  $m(n, t) = \max\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subset \mathcal{P}([n]), \text{ com } |A \cap B| \neq t \text{ para todo par } A, B \in \mathcal{A} \text{ distintos}\}$ . Ob-  
 466 serve que se  $|A| = a, |B| = b$  e os conjuntos  $A$  e  $B$  são aleatórios, então  $\mathbb{E}[|A \cap B|] = \frac{ab}{n}$ . Erdős  
 467 conjecturou que existe  $\epsilon > 0$  tal que  $m(n, \lfloor \frac{n}{4} \rfloor) \leq (2 - \epsilon)^n$ . Tal conjectura foi provada por Frankl  
 468 e Rödl '87, com  $(2 - \epsilon)^n < 1.99^n$ .

469 **4.2. O número cromático do  $\mathbb{R}^n$ .** Considere<sup>6</sup> o grafo  $G_{n,l} = (\mathbb{R}^n, E_l)$ , em que o conjunto de  
 470 vértices é o  $\mathbb{R}^n$  e conjunto de arestas é  $E_l := \{\{x, y\} : x, y \in \mathbb{R}^n, \|x - y\| = l\}$ . Note que  $G_{n,k}$  e  
 471  $G_{n,l}$  são isomorfos para todo  $k, l > 0$ .

472 **Problema 26.** Determinar/estimar  $c(n) = \chi(G_{n,1})$ .

<sup>6</sup>Notas produzidas por Bruno Pasqualotto Cavalari e Marcelo Sales

473 O número cromático de  $G_{n,1}$  é muito difícil de determinar, e está em aberto até mesmo  
 474 para o plano. Mas em 1972, Larman e Rogers [[?larman\\_rogers\\_1972](#)] provaram que  $c(n) \leq$   
 475  $(2\sqrt{2} + o(1))^n$ , e conjecturaram que a ordem de crescimento de  $c(n)$  era de fato exponencial. Em  
 476 1981, Frankl e Wilson provaram essa conjectura, usando os teoremas de intersecção que vimos  
 477 anteriormente.

478 **Teorema 27** (Frankl e Wilson 1981). *Existe  $n_0$  tal que para todo  $n \geq n_0$  temos  $c(n) \geq 1.1^n$ .*

479 *Demonstração.* Suponha primeiro que  $n = 4p - 1$ , para algum primo  $p \geq p_0$  suficientemente  
 480 grande de modo que

$$\frac{\binom{4p-1}{2p-1}}{2^{\binom{4p-1}{p-1}}} \geq (1.139)^{4p-1}.$$

481 Denote  $G = G_{n,1}$ . Considere a família  $\mathcal{A}$  de todos os subconjuntos de  $2p - 1$  elementos de  
 482  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Para cada  $A \in \mathcal{A}$ , defina  $\mathbf{v}_A := \frac{1}{\sqrt{2p}} \mathbf{c}_A$ , onde  $\mathbf{c}_A \in \{0, 1\}^n$  é o vetor característico  
 483 de  $A$ . Defina  $G_p$  o subgrafo induzido de  $G$  cujos vértices são os vetores  $\mathbf{v}_A$ , para  $A \in \mathcal{A}$ .

484 Observe que se  $A, B \in \mathcal{A}$ , e  $s = |A \cap B|$ , então  $\|\mathbf{c}_A - \mathbf{c}_B\|^2 = |A \setminus B| + |B \setminus A| = |A| +$   
 485  $|B| - 2|A \cap B| = 2(2p - 1 - s)$ . Deste modo, se  $s = p - 1$ , obtemos  $\|\mathbf{c}_A - \mathbf{c}_B\| = \sqrt{2p}$ . Como  
 486  $\|\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B\| = \frac{1}{\sqrt{2p}} \|\mathbf{c}_A - \mathbf{c}_B\|$ , segue que  $\|\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B\| = 1$  se, e somente se,  $|A \cap B| = p - 1$ .

487 Isto quer dizer que vértices independentes de  $G_p$  correspondem a conjuntos  $A, B \in \mathcal{A}$  tais que  
 488  $|A \cap B| \neq p - 1$ . Portanto, pelo Corolário 7 da aula passada, temos que

$$\alpha(G_p) \leq 2 \binom{4p-1}{p-1} = 2 \binom{n}{p-1}.$$

489 Segue que

$$\chi(G) \geq \chi(G_p) \geq \frac{|\mathcal{A}|}{2 \binom{n}{p-1}} = \frac{\binom{4p-1}{2p-1}}{2 \binom{4p-1}{p-1}} \geq (1.139)^{4p-1} > 1.1^n.$$

490 Segue da densidade dos primos que  $c(n) \geq (1.139)^n$  para todo  $n$  suficientemente grande.  $\square$

491 **4.3. A conjectura de Borsuk.** Para todo inteiro positivo  $d$ , definimos a esfera de dimensão  
 492  $d - 1$  como  $S^{d-1} := \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| = 1\}$ . Para  $X \subset \mathbb{R}^d$ , defina também o *diâmetro* de  $X$  do  
 493 seguinte modo:

$$\text{diam}(X) := \sup \{\|x - y\| : x, y \in X\}.$$

494 Respondendo a uma pergunta de Ulam, Borsuk e Lyusternik & Schnirelmann provaram  
 495 independentemente o seguinte resultado.

496 **Teorema 28** (Borsuk/Lyusternik-Schnirelmann). *Suponha que  $U_1, \dots, U_d$  são conjuntos abertos,*  
 497  *$F_1, \dots, F_d$  são conjuntos fechados e  $X_1, \dots, X_d$  são conjuntos abertos ou fechados. Suponha*

498 ainda que

$$S^{d-1} = \bigcup_{i=1}^d U_i = \bigcup_{i=1}^d F_i = \bigcup_{i=1}^d X_i.$$

499 Então existem  $i, j, k$  tais que  $\{-x, x\} \in U_i, F_j, X_k$  para algum  $x \in S^{d-1}$ .

500 Isto quer dizer que se decomposmos  $S^{d-1}$  em  $d$  conjuntos abertos e/ou fechados  $X_1, \dots, X_d$ ,  
501 teremos que  $\text{diam } X_i = \text{diam } S^{d-1}$  para algum  $i = 1, \dots, d$ .

502 Se os conjuntos  $X_1, X_2, \dots, X_m \subset X$  formam uma partição de  $X$  tal que  $\text{diam}(X_i) < \text{diam}(X)$   
503 para todo  $i$ , então diremos que essa partição *reduz o diâmetro* de  $X$  e tem *tamanho* igual a  $m$ .

504 Motivado pelo teorema acima, Borsuk fez a seguinte conjectura:

505 **Conjectura 29** (Conjectura de Borsuk). *Para todo  $S \subset \mathbb{R}^d$ , com  $0 < \text{diam } S < \infty$ , existe uma*  
506 *partição de  $S$  de tamanho  $d + 1$  que reduz o diâmetro.*

507 Seja  $f(d)$  o menor número  $k$  tal que para todo  $S \subset \mathbb{R}^d$  existe uma partição de  $S$  de tamanho  
508  $k$  que reduz o diâmetro. Pelo Teorema de Lyusternik-Schnirelmann, é claro que  $f(d) \geq d + 1$ .  
509 A conjectura de Borsuk pergunta se  $f(d) = d + 1$ . Oded Schramm provou que  $f(d) \leq 1.23^d$   
510 para todo  $d$  suficientemente grande. Em 1993, Kahn e Kalai mostraram que  $f(d) \geq (1.23)^{\sqrt{d}}$ ,  
511 mostrando falsa a conjectura de Borsuk.

512 **Teorema 30** (Kahn e Kalai (1993)). *Vale que  $f(d) \geq (1.2)^{\sqrt{d}}$  para todo  $d$  suficientemente*  
513 *grande.*

514 Provaremos esse resultado na próxima aula.

515 Precisaremos <sup>7</sup> da seguinte versão do lema de intersecção.

516 **Lema 31.** *Seja  $p$  primo e  $\mathcal{A} \subset \binom{[4p]}{2p}$  uma família de conjuntos tal que  $|A \cap B| \neq p$  para todo*  
517  *$A, B \in \mathcal{A}, A \neq B$ . Então vale que*

$$|\mathcal{A}| \leq 2 \sum_{0 \leq j < p} \binom{4p}{j} \leq 4 \binom{4p}{p-1}.$$

518 *Primeira prova do Teorema de Kahn-Kalai.* Seja  $n = 4p$  para algum  $p$  primo suficientemente  
519 grande. Seja  $G = (V, E)$  o grafo completo com conjunto de vértices  $V = [n]$ . Para todo  $A \subset [n]$ ,  
520 defina  $\partial A := \{\{x, y\} \in E : x \in A, y \notin A\}$ . Iremos provar o caso em que  $d = |E| = \binom{n}{2} = \binom{4p}{2}$ . O  
521 caso geral para  $d$  suficientemente grande segue do Teorema dos Números Primos.

522 Considere  $X = \{x_{\partial A} \in \mathbb{R}^E : A \subset [n], |A| = 2p\}$ , onde  $x_{\partial A}$  é o vetor característico de  $\partial A$ . Note  
523 que  $|X| = \frac{1}{2} \binom{4p}{2p}$ , pois  $x_{\partial A} = x_{\partial A^c}$ . Ademais, se  $x_{\partial A} \in X$ , então  $|\partial A| = 2p \cdot 2p = 4p^2$ . Além

<sup>7</sup>Notas produzidas por Bruno Pasqualotto Cavalari e Marcelo Sales

524 disso, se  $|A| = |B| = 2p$ , então

$$|\partial A \cap \partial B| = |A \cap B|^2 + (2p - |A \cap B|)^2.$$

525 Por fim, temos que

$$\begin{aligned} \|x_{\partial A} - x_{\partial B}\|^2 &= |\partial A \Delta \partial B| \\ &= |\partial A| + |\partial B| - 2|\partial A \cap \partial B| \\ &= 2(4p^2) - 2\left(|A \cap B|^2 + (2p - |A \cap B|)^2\right) \\ &= 4|A \cap B|(2p - |A \cap B|). \end{aligned}$$

526 Portanto, temos que se  $X_i \subset X$ , então  $\text{diam } X_i = \text{diam } X = 4p^2$  se, e somente se, existem

527  $x_{\partial A}, x_{\partial B} \in X_i$  tais que  $|A \cap B| = p$ .

528 Suponha agora que  $X = X_1 \cup \dots \cup X_t$ , com  $\text{diam } X_i < \text{diam } X$  para todo  $i$ . Da observação

529 anterior concluímos que  $|A \cap B| \neq p$  para todo  $x_{\partial A}, x_{\partial B} \in X_i$ . Segue do Lema 31 que

$$|X_i| \leq 4 \binom{4p}{p-1}.$$

530 Portanto,

$$t \geq \frac{|X|}{4 \binom{4p}{p-1}} = \frac{\frac{1}{2} \binom{4p}{2p}}{4 \binom{4p}{p-1}} \geq (1.1397)^{4p} \geq (1.1397)^{\sqrt{2d}} > (1.2)^{\sqrt{d}}.$$

531 Isto mostra que  $f(d) > (1.2)^{\sqrt{d}}$ , o que termina a prova. □

532 Vamos agora ver uma segunda prova do Teorema de Kahn-Kalai. Precisaremos primeiro do

533 seguinte lema, que pode ser provado por uma aplicação direta do Lema 31.

534 **Lema 32.** *Seja  $p$  um primo e  $X \subset \{-1, 1\}^{4p} \subseteq \mathbb{R}^{4p}$  um conjunto tal que  $\langle \mathbb{1}, x \rangle = 0$  para todo*

535  $x \in X$  e  $\langle x, y \rangle \neq 0$  para todo  $x, y \in X$ . Segue que

$$|X| \leq 2 \sum_{0 \leq j < p} \binom{4p}{j} \leq 4 \binom{4p}{p-1}.$$

536 *Segunda prova do Teorema de Kahn-Kalai.* Fixe  $p$  primo e tome  $n = 4p$ . Seja  $M_n$  o conjunto

537 das matrizes  $n \times n$ . Considere a aplicação  $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}$  que leva  $x \in \mathbb{R}^n$  ao vetor cujas  $n^2$

538 entradas são as da matriz  $xx^\top$ . Note que, para  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , a norma de  $\rho(x) - \rho(y)$  satisfaz

$$\|\rho(x) - \rho(y)\|^2 = \|xx^\top - yy^\top\|^2 = (x^\top x)^2 + (y^\top y)^2 - 2(x^\top y)^2 = \|x\|^4 + \|y\|^4 - 2\langle x, y \rangle^2.$$

539 Seja  $Y = \{x \in \{-1, 1\}^n : \langle x, \mathbb{1} \rangle = 0\}$ . Claramente, temos  $\|x\| = \sqrt{n}$  para todo  $x \in Y$ . Defina  
 540  $Z = \{\rho(x) : x \in Y\} \subseteq \mathbb{R}^{n^2}$ . Temos que  $|Z| = |Y| = \frac{1}{2} \binom{4p}{2p}$ . Note ainda que

$$\|\rho(x) - \rho(y)\|^2 = 2n^2 - 2\langle x, y \rangle^2.$$

541 Portanto, segue que  $\text{diam}(Z) = 2n^2$ , e temos que  $u, v \in Z$  realizam o diâmetro de  $Z$  se, e somente  
 542 se, existem  $x, y \in Y$  tais que  $\langle x, y \rangle = 0$  e  $u = \rho(x)$  e  $v = \rho(y)$ .

543 Suponha agora que  $Z = Z_1 \cup \dots \cup Z_t$ , com  $\text{diam } Z_i < \text{diam } Z$  para todo  $i$ . Lembre que  $Z \subset \mathbb{R}^d$ ,  
 544 onde  $d = n^2 = (4p)^2$ . Da observação anterior concluímos que  $\langle x, y \rangle \neq 0$  para todo  $\rho(x), \rho(y) \in Z_i$ .  
 545 Segue do Lema 32 que

$$|Z_i| \leq 4 \binom{4p}{p-1}.$$

546 Portanto,

$$t \geq \frac{|Z|}{4 \binom{4p}{p-1}} = \frac{\frac{1}{2} \binom{4p}{2p}}{4 \binom{4p}{p-1}} \geq (1.1397)^{4p} \geq (1.1397)^{\sqrt{d}} > (1.1)^{\sqrt{d}}.$$

547 Isto mostra que  $f(d) > (1.1)^{\sqrt{d}}$ . Para mostrar que  $f(d) > (1.2)^{\sqrt{d}}$ , é necessário considerar um  
 548 conjunto  $Z'$  de matrizes triangulares superiores estritas. Nesse caso, teremos  $d = \binom{n}{2}$  e a conta  
 549 segue como na primeira prova.  $\square$

550 **4.4. Construção de cotas inferiores para o número de Ramsey via teoremas de in-**  
 551 **tersecção.** Definimos o número de Ramsey como

$$R(n) = \min\{N : N \rightarrow (n)_2^2\} = \min\{N : \text{para todo } G = G^N \text{ vale } \omega(G) \geq n \text{ ou } \alpha(G) \geq n \}.$$

552 Sabemos que

$$\sqrt{2} \leq \liminf R(n)^{1/n} \leq \limsup R(n)^{1/n} \leq 4.$$

553 Um problema em aberto é provar que existe  $\lim R(n)^{1/n}$  e, caso afirmativo, determinar esse limite.  
 554 Esse problema motiva a construção esboçada a seguir, que dá um limite inferior superpolinomial  
 555 para  $R(n)$ .

556 Seja  $p$  um número primo fixo e  $n > 2p^2$ . Seja  $G_{n,p}$  o grafo com conjunto de vértices  $V = \binom{[n]}{p^2-1}$   
 557 e conjunto de arestas  $E = \{\{A, B\} : A \neq B, |A \cap B| \neq 1 \pmod{p}\}$ .

558 **Teorema 33.** *Temos que  $\max\{\alpha(G_{n,p}), \omega(G_{n,p})\} \leq 2 \binom{n}{p-2}$ .*

559 *Demonstração.* Aplique os teoremas da intersecção.  $\square$

560 Para obter uma boa cota inferior para  $R(n)$ , gostaríamos que  $|V(G_{n,p})| = \binom{n}{p^2-1}$  seja grande  
 561 com relação a  $2\binom{n}{p-2}$ . Utilizando o Teorema dos Números Primos e estimativas para o coeficiente  
 562 binomial, provamos o seguinte corolário.

563 **Corolário 34.** *Para todo  $\varepsilon > 0$  e  $t \geq t_0$  existe grafo  $G$  com pelo menos  $t^{(1-\varepsilon)\ln t/\ln \ln t}$  vértices e*  
 564  $\max\{\alpha(G), \omega(G)\} \leq t$ .

565 §5. A CONJECTURA DE KNESER

566 **Definição 35.** *Seja  $1 \leq k \leq n$ . O grafo de Kneser  $K(n, k) = (V, E)$  é tal que:*

$$V = \binom{[n]}{k} \quad E = \left\{ \{A, B\} \in \binom{V}{2} : A \cap B = \emptyset \right\}$$

567 Se  $2k > n$ , então quaisquer conjuntos  $A$  e  $B$  de tamanho  $k$  tem intersecção não vazia. Portanto,  
 568 para  $k > n/2$ , o grafo  $K(n, k)$  é vazio. Daqui para frente iremos supor que  $k \leq n/2$ .<sup>8</sup>

569 No grafo de Kneser, um conjunto independente máximo é constituído por todos os conjuntos  
 570 que contém um dado elemento. Por Erdős-Ko-Rado, temos:

$$\begin{aligned} \alpha(K(n, k)) &= \binom{n-1}{k-1} \\ &= \frac{k}{n} \binom{n}{k} \\ &= \frac{k}{n} |V| \end{aligned}$$

571 Como para qualquer grafo  $G$  vale  $\alpha(G)\chi(G) \geq V$ , temos que  $\chi(K(n, k)) \geq n/k$ .

572 O número cromático de  $K(n, k)$  possui alguns limitantes superiores óbvios:

573 (1)  $\chi \leq n$ : Basta usar como "cor" do vértice o menor elemento do conjunto. Como conjuntos  
 574 que contém um elemento em comum não são vizinhos em  $K(n, k)$ , essa coloração é  
 575 própria.

576 (2)  $\chi \leq n - k + 1$ : Usando o menor elemento do conjunto para cor na verdade nos dá um  
 577 bound melhor, visto que, como os conjuntos tem  $k$  elementos, o mínimo não pode ser  
 578 superior a  $n - k + 1$ .

---

<sup>8</sup>Notas produzidas por Gervásio Santos e Nathan Proença

(3)  $\chi \leq n - 2k + 2$ : Se damos para um vértice  $A \in V(K(n, k))$  a cor

$$\text{cor}(A) = \min\{\min A, n - 2k + 2\}$$

579 Temos uma coloração própria do grafo de Kneser: se  $A, B \in V(K(n, k))$  tem a  
580 mesma cor  $i < n - 2k + 2$ , então eles possuem o mesmo elemento mínimo  $i$  e não  
581 podem ser disjuntos. Caso eles tenham a mesma cor  $n - 2k + 2$ , então temos que  
582  $A, B \subset \{n - 2k + 2, \dots, n\}$ ; como esse conjunto tem apenas  $2k - 1$  elementos,  $A, B$  não  
583 podem ser disjuntos.

584 Pode-se ver então que  $\chi(K(n, k)) \leq n - 2k + 2$ .

585 **Conjectura 36. (Conjectura de Kneser)** O bound  $\chi(K(n, k)) \leq n - 2k + 2$  é justo.

586 5.1. **Teoremas de Borsuk-Ullam.** Seja  $\mathcal{S}^d = \{x \in \mathbb{R}^{d+1} : \|x\| = 1\} \subset \mathbb{R}^{d+1}$

587 **Teorema 37.** Para todo  $f : \mathcal{S}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ , contínua,  $\exists x^* \in \mathcal{S}^d$  tal que  $f(x^*) = f(-x^*)$ .

588 **Teorema 38. (Lynsternik-Shnirel'man '30)** Se  $\mathcal{S}^d = U_1 \cup \dots \cup U_{d+1}$  com cada  $U_i$  ( $1 \leq i \leq d$ )  
589 **aberto ou fechado**, então  $\exists 1 \leq m \leq d + 1$  e  $x^* \in \mathcal{S}^d$  tal que  $\{x^*, -x^*\} \subset U_m$ .

590 *Demonstração. (Prova do Teorema 38 a partir do Teorema 37)*

591 Seja  $\mathcal{S}^d = U_1 \cup \dots \cup U_{d+1}$  como no enunciado do teorema. Suponha por contradição que não  
592 existe  $x^*$  e  $m$  como desejados.

593 Seja:

$$f : \mathcal{S}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$$
$$x \rightarrow (d(x, U_1), \dots, d(x, U_d))$$

594 onde  $d(x, U) = \inf\{d(x, y) : y \in U\}$ .

595 Temos que  $f$  é uma função contínua, então, pelo Teorema 37, existe  $x^* \in \mathcal{S}^d$  tal que  
596  $f(x^*) = f(-x^*)$ . Estamos supondo que  $\{x^*, -x^*\} \not\subset U_{d+1}$ . Sem perda de generalidade, podemos  
597 supor que  $x^* \in U_k$ ,  $k \leq d$ . Assim:

$$f(x^*) = f(-x^*) \rightarrow d(-x^*, U_k) = d(x^*, U_k) = 0$$

598 Se  $U_k$  é fechado, então qualquer ponto infinitamente próximo dele pertence a ele, o que  
599 significa que temos  $-x^* \in U_k$ , o que implica em  $\{x^*, -x^*\} \subset U_k$ , um absurdo.

600 Suponha então que  $U_k$  é aberto. Temos que  $-x^* \in \overline{U_k}$  (o fecho de  $U_k$ ). Por outro lado, temos  
 601 que  $\overline{U_k} \subset \mathcal{S}^d \setminus (-U_k)$  (uma vez que estamos supondo que  $U_k \cap -U_k = \emptyset$ ).

602 Assim  $-x^* \in \overline{U_k} \subset \mathcal{S}^d \setminus -U_k$ . Logo,  $-x^* \notin -U_k$ , o que implica que  $x^* \notin U_k$ , um absurdo.  $\square$

**Teorema 39. (Lovász '78)** *Seja  $n = 2k + d$  com  $k \geq 1$  e  $d \geq 0$ . Então*

$$\chi(K(n, k)) = d + 2 = n - 2k + 2$$

603 *Demonstração.* Como já temos que  $\chi(K(n, k)) \leq d + 2 = n - 2k + 2$ , basta provar que  $\chi(K(n, k)) \geq$   
 604  $d + 2$ .

605 Vamos considerar  $\mathcal{S}^{d+1} \subset \mathbb{R}^{d+2}$ . Sejam  $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{S}^{d+1}$   $n$  pontos em posição geral. Isto é,  
 606 tais que quaisquer  $d + 2$  deles geram  $\mathbb{R}^{d+2}$  (por combinações lineares).

607 Em particular, um hiperplano (um espaço de dimensão  $d + 1$ ) passando pela origem contém  
 608 no máximo  $d + 1$  dos  $x_i$ 's. Caso tivessem  $\geq d + 2$ , o espaço teria dimensão  $d + 2$ , um absurdo.

609 Identificamos  $V(K(n, k))$  com  $\binom{X}{k} = \{X' \subset X : |X'| = k\}$ , onde  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ .

Suponha que

$$\binom{X}{k} = V_1 \cup \dots \cup V_{d+1}$$

610 Queremos mostrar que isso não pode corresponder a uma coloração própria, ou seja, os  $V_i$ 's  
 611 não são conjuntos independentes, ou seja,  $\exists A, B \in \binom{X}{k}$ ,  $A \cap B = \emptyset$  e  $A, B \in V_i$ , para algum  $i$ .

612 Para  $1 \leq i \leq d$ , definimos:

$$O_i = \{x \in \mathcal{S}^{d+1} : \text{o hemisfério } Hx \text{ em torno de } x \text{ contém algum membro de } V_i\}$$

613 Temos que  $Hx = \{y \in \mathcal{S}^{d+1} : \langle x, y \rangle > 0\}$ . Temos também que os  $O_i$ 's são conjuntos abertos.

Seja

$$C = \mathcal{S}^{d+1} \setminus \bigcup_{i=1}^{d+1} O_i$$

614 Então  $C$  é um conjunto fechado, pois é o complemento de um aberto, a união dos  $O_i$ 's.

Podemos então escrever  $\mathcal{S}^{d+1}$  com uma união de abertos e fechados da seguinte forma:

$$\mathcal{S}^{d+1} = \bigcup_{i=1}^{d+1} O_i \cup C$$

615 Pelo Teorema 38, temos que existem  $x^*$  e  $-x^* \in \mathcal{S}^{d+1}$  tais que:

- 616 i.  $\{x^*, -x^*\} \subset C$ , ou
- 617 ii.  $\{x^*, -x^*\} \subset O_i$ , para algum  $i$

618 Suponha que i. valha. Então  $|Hx^* \cap X| \leq k - 1$ , pois se tivéssemos que  $|Hx^* \cap X| \geq k$ ,  
619 então algum  $A \in \binom{X}{k}$  estaria contido em  $Hx^*$  e  $x^*$  estaria em algum  $O_i$ . Analogamente, temos  
620  $|H(-x^*) \cap X| \leq k - 1$ . Por fim, temos que alguns pontos de  $X$  podem estar no equador de  $S^{d+1}$ ,  
621 mas no máximo  $d + 1$ , pois esse equador está contido num hiperplano. Temos:

$$|X| \leq (k - 1) + (k - 1) + (d + 1) = 2k + d - 1 = n - 1$$

622 Um absurdo. Suponha então que valha ii. Sejam  $A, B \in V_i$  os conjuntos que fazem com  
623 que  $x^*$  e  $-x^*$  estejam em  $O_i$ , respectivamente. Temos que  $A \subset Hx^*$  e  $B \subset H(-x^*)$ , logo,  
624  $A \cap B \subset Hx^* \cap H(-x^*) = \emptyset$ . Estes são os conjuntos procurados que mostram que a coloração  
625 dos  $V_i$ 's não pode ser própria.  $\square$

626 **5.2. Variante de Dol'nikov.** Seja  $\mathcal{F} \in 2^X$ , com  $X$  um conjunto finito. Podemos generalizar o  
627 grafo de Kneser da seguinte forma. Tome  $K(\mathcal{F}) = (V, E)$ , onde:

$$V = \mathcal{F} \qquad E = \{\{A, B\} : A, B \in \mathcal{F}; A \cap B = \emptyset\}$$

628 Dado  $\mathcal{G} \subset 2^X$ , um hipergrafo, seu número cromático  $\chi(\mathcal{G})$  é dado pelo menor  $t$  tal que existe  
629 uma coloração  $c : X \rightarrow [t]$  na qual nenhum  $G \in \mathcal{G}$  é monocromático. Ou seja, é o menor número  
630 de cores que podemos usar para "pintar" os elementos de  $X$  sem que nenhuma das arestas de  $\mathcal{G}$   
631 (visto como um hipergrafo) seja monocromática.

632 **Definição 40.** *Seja  $\mathcal{G} \in 2^X$  e  $Y \subset X$ . O hipergrafo induzido  $\mathcal{G} - Y$  é  $\mathcal{G}[X \setminus Y] = \{G \in \mathcal{G} :$   
633  $G \cap Y = \emptyset\}$*

**Definição 41.** *O  $m$ -defeito de coloração de  $\mathcal{G}$  é dado por*

$$cd_m(\mathcal{G}) = \min\{|Y| : \chi(\mathcal{G} - Y) = m\}$$

634 *Representando o tamanho do menor subconjunto de  $X$  que deve ser proibido em  $\mathcal{F}$  para que a*  
635 *coleção resultante (vista como um hipergrafo) seja  $m$ -colorível.*

636 **Teorema 42. (Dol'nikov '81)** *Para todo  $\mathcal{F} \in 2^X$ , vale que  $\chi(K(\mathcal{F})) \geq cd_2(\mathcal{F})$*

637 *Demonstração. (Devida a Matoušek)*

638 Suponha que  $\chi(K(\mathcal{F})) := d + 1$ . Fixe uma coloração própria de  $V(K(\mathcal{F})) = \mathcal{F} = V_1 \cup \dots \cup V_{d+1}$ .

639 Considere  $x_1, \dots, x_T \in S^{d+1}$  em posição geral, onde  $T = |X|$ . Agora identificamos (colocamos  
640 em bijeção)  $X$  com  $\{x_1, \dots, x_T\}$ .

641 Definimos  $Hx$  e  $O_i$  como na prova do Teorema 39. Seja  $C = S \setminus \bigcup_{i=1}^{d+1} O_i$ . Pelo Teorema 38,  
642 temos que  $\exists x^* \in \mathcal{S}^{d+1}$  tal que ou  $x^*$  e  $-x^* \in O_i$  para algum  $i$  ou  $x^*$  e  $-x^* \in C$ .

643 Contudo, pela forma como os  $O_i$ 's foram definidos, temos que não podemos ter  $x^*$  e  $-x^*$  em  $O_i$ .  
644 Isso implicaria os que dois conjuntos disjuntos de  $\mathcal{F}$  estão na mesma partição  $V_i$  (analogamente  
645 a prova do Teorema 39).

646 Então temos que  $x^*$  e  $-x^* \in C$ . Se tomamos  $Y = \overline{Hx^*} \cap \overline{H(-x^*)} \cap \{x_1, \dots, x_T\}$ , temos que  
647  $|Y| \leq d + 1$ , pois  $Y$  corresponde ao equador de  $\mathcal{S}^{d+1}$  quando  $x^*$  e  $-x^*$  são tomados como polos.

648 Podemos pintar todos os pontos em  $Hx^*$  de uma cor (digamos, azul), e todos os pontos em  
649  $H(-x^*)$  de outra (vermelho). Como  $C$  é o complemento da união dos  $O_i$ 's, por definição temos  
650 que nenhum conjunto de  $\mathcal{F}$  tem  $k$  pontos em  $Hx^*$  ou  $H(-x^*)$  (caso contrário, eles pertenceriam  
651 a algum  $O_i$ ). v Apenas os conjuntos  $A \in \mathcal{F}$  tais que  $A \cap Y \neq \emptyset$  poderiam ser monocromáticos.  
652 Assim, se consideramos  $\mathcal{F} - Y$ , não temos arestas monocromáticas e obtemos uma 2-coloração  
653 própria.

654 Então temos que  $\chi(\mathcal{F} - Y) \leq 2$ . Logo,  $cd_2(\mathcal{F}) \leq d + 1 = \chi(K(\mathcal{F}))$ . □

655 **Parte 2. O MÉTODO PROBABILÍSTICO**

656 §6. ESPAÇOS DISCRETOS

657 Um<sup>9</sup> **espaço de probabilidade discreto** é um par  $(\Omega, \mathbb{P})$ , onde  $\Omega$  é um conjunto finito ou  
 658 enumerável, e  $\mathbb{P}: \Omega \rightarrow [0, 1]$  é uma função tal que  $\sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\omega) = 1$ . Dizemos que  $A \subset \Omega$  é um  
 659 **evento**, e escrevemos

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\omega) = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\omega) \mathbb{1}_A(\omega),$$

660 onde  $\mathbb{1}_A: \Omega \rightarrow \{0, 1\}$  é a **função indicadora** do conjunto  $A$ , dada por

$$\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 0 & \omega \notin A, \\ 1 & \omega \in A, \end{cases} \quad \forall \omega \in \Omega.$$

661 Uma **variável aleatória** é uma função  $X: \Omega \rightarrow U$ , onde  $U$  é um conjunto arbitrário que,  
 662 quando não explicitado, assumiremos ser o conjunto dos números reais. Para todo  $x \in U$ ,  
 663 escrevemos

$$\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}) = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\omega) \mathbb{1}_{\{\omega : X(\omega) = x\}}(\omega).$$

664 Dizemos que variáveis aleatórias  $X_1, \dots, X_k$  com contradomínios  $U_1, \dots, U_k$ , respectivamente,  
 665 são **independentes** se, para todos os  $x_1 \in U_1, \dots, x_k \in U_k$ , temos

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_k = x_k) = \mathbb{P}(X_1 = x_1) \dots \mathbb{P}(X_k = x_k).$$

666 Uma família de variáveis aleatórias  $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  é  **$k$ -a- $k$  independente** se para todos  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \Lambda$   
 667 distintos temos que  $X_{\lambda_1}, \dots, X_{\lambda_k}$  são independentes.

668 **Observação 43.** Note que  $(k+1)$ -a- $(k+1)$  independência implica  $k$ -a- $k$  independência, mas  
 669 a recíproca não vale. Por exemplo, sejam  $X$  e  $Y$  variáveis aleatórias independentes com  
 670 contradomínio  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  e com  $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(Y = 1) = 1/2$ , e seja  $Z = X + Y$ . Temos então  
 671 que  $X, Y, Z$  são 2-a-2 independentes, mas não são 3-a-3 independentes.

672 Seja  $B \subset \Omega$  tal que  $\mathbb{P}(B) > 0$ . Para todo  $A \subset \Omega$ , a **probabilidade condicional**  $\mathbb{P}(A|B)$   
 673 de  $A$  dado  $B$  é dada por

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

---

<sup>9</sup>Notas produzidas por Victor Portella e Gabriel Barros

674 O **espaço de probabilidade condicionado** a  $B$  é o espaço de probabilidade  $(B, \mathbb{P}_B)$ , onde  $\mathbb{P}_B: B \rightarrow$   
 675  $[0, 1]$  é dado por

$$\mathbb{P}_B(\omega) = \frac{\mathbb{P}(\omega)}{\mathbb{P}(B)}, \quad \forall \omega \in B.$$

676 Seja  $\{B_i\}_{i \in I}$  uma partição de  $\Omega$ . A **lei da probabilidade total** diz que, para todo  $A \subset \Omega$ , vale  
 677 que

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A \cap B_i) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i).$$

678 Seja  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  uma variável aleatória. A **esperança** de  $X$  é

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\omega) = \sum_{x \in \mathbb{R}} x\mathbb{P}(X = x),$$

679 onde a esperança está bem definida se a primeira soma absolutamente convergente, e a segunda  
 680 igualdade vale só se a segunda soma também for absolutamente convergente. Por exemplo,  
 681 se  $A \subset \Omega$ , então

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_A) = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{1}_A(\omega)\mathbb{P}(\omega) = \mathbb{P}(A).$$

682 Sejam  $X_1, \dots, X_k$  variáveis aleatórias, e sejam  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  números reais. Vale a equação

$$\mathbb{E}(\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_k X_k) = \lambda_1 \mathbb{E}(X_1) + \dots + \lambda_k \mathbb{E}(X_k).$$

683 Tal propriedade é conhecida como **linearidade** da esperança. Se  $X_1, \dots, X_k$  são independentes,  
 684 então

$$\mathbb{E}(X_1 X_2 \dots X_k) = \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2) \dots \mathbb{E}(X_k).$$

685 Sejam  $X, Y$  variáveis aleatórias. A **covariância** entre  $X$  e  $Y$  é

$$\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))).$$

686 Pela definição de covariância, temos que

$$\begin{aligned} \text{cov}(X, Y) &= \mathbb{E}(XY - X\mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(X)Y + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)) \\ &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X\mathbb{E}(Y)) - \mathbb{E}(\mathbb{E}(X)Y) + \mathbb{E}(\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)) \\ &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \\ &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y). \end{aligned}$$

687 A **variância** de uma variável aleatória  $X$  é

$$\text{var}(X) = \text{cov}(X, X) \geq 0.$$

688 Se  $B \subset \Omega$  é um evento,  $\mathbb{E}(X|B)$ ,  $\text{cov}(X, Y|B)$  e  $\text{var}(X|B)$  denotam as versões condicionais  
 689 de esperança de  $X$ , de covariância entre  $X$  e  $Y$  e de variância de  $X$ , respectivamente. São  
 690 simplesmente a esperança, covariância, e variância, respectivamente, no espaço de probabilidade  
 691 condicionado a  $B$ . Se  $X$  e  $Y$  são variáveis aleatórias, então

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{y \in \mathbb{R}} \mathbb{E}(X|Y = y)\mathbb{P}(Y = y).$$

692 **6.1. As desigualdades de Markov e Chebyshev.** Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , seja  $(\Omega_n, \mathbb{P}_n)$  um espaço  
 693 de probabilidade discreto e  $B_n \subset \Omega_n$  um evento “ruim”. Muitas vezes, queremos provar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_n(B_n) = 0.$$

694 Iremos nos deparar com problemas desse tipo na Seção ??, por exemplo. Nesses casos, é de nosso  
 695 interesse calcular limitantes que tendem a 0. Mostraremos agora duas desigualdades importantes  
 696 para limitarmos superiormente as probabilidades de certos eventos de variáveis aleatórias em  
 697 função de suas esperanças e variâncias.

698 **Teorema 44** (Desigualdade de Markov). *Seja  $X$  uma variável aleatória com  $X \geq 0$ . Então,*  
 699 *para todo  $s \in \mathbb{R}$  positivo,*

$$\mathbb{P}(X \geq s) \leq \frac{1}{s} \mathbb{E}(X).$$

700 *Demonstração.* Note que

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in \mathbb{R}} x\mathbb{P}(X = x) \geq \sum_{x \geq s} s\mathbb{P}(X = x) = s\mathbb{P}(X \geq s). \quad \square$$

701 **Teorema 45** (Desigualdade de Chebyshev). *Se  $X$  é variável aleatória e  $t \in \mathbb{R}$  é positivo, então*

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq t) \leq \frac{1}{t^2} \text{var}(X).$$

702 *Demonstração.* Defina  $Y = (X - \mathbb{E}(X))^2 \geq 0$ . Usando o Teorema 44,

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq t) = \mathbb{P}(Y \geq t^2) \leq \frac{1}{t^2} \mathbb{E}(Y).$$

703 Basta notar agora que  $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(X - \mathbb{E}(X))) = \text{cov}(X, X) = \text{var}(X)$ . □

704 **6.2. Aplicação: O número de Ramsey.** Sejam  $n, t \in \mathbb{N}$ . Escrevemos  $K^n \rightarrow (K^t)_2^{\text{ar}}$   
 705 (ou  $n \rightarrow (t)_2$ ) se, para toda 2-coloração das arestas do  $K^n$ , existe um  $K^t$  monocromá-  
 706 tico como subgrafo desse mesmo  $K^n$ . O **número de Ramsey** (para duas cores) é dado  
 707 por  $R(t) = \min\{n \in \mathbb{N} : n \rightarrow (t)_2\}$ .

708 Um teorema famoso de Ramsey diz que esse número existe, e ainda nos mostra uma cota  
709 superior para esse valor.

710 **Teorema 46** ([20]). *Para todo  $t > 1$ , temos que  $R(t)$  é finito. De fato, temos  $R(t) \leq 2^{2t-2}$ .*

711 Em 1947, Erdős mostrou uma cota inferior para o número de Ramsey através de um argumento  
712 probabilístico.

713 **Teorema 47** ([10]). *Para todo  $t \geq 3$ , temos  $R(t) > \lfloor 2^{t/2} \rfloor$ .*

714 *Demonstração.* Seja  $n = \lfloor 2^{t/2} \rfloor$ , e seja  $\gamma: E(K^n) \rightarrow \{\text{AZUL}, \text{VERMELHO}\}$  uma coloração  
715 aleatória das arestas de forma que  $\{\gamma(e)\}_{e \in E(K^n)}$  são variáveis independentes e  $\mathbb{P}(\gamma(e) =$   
716  $\text{AZUL}) = \mathbb{P}(\gamma(e) = \text{VERMELHO}) = 1/2$  para todo  $e \in E(K^n)$ .

717 **Afirmção 48.** *Com probabilidade positiva, a coloração  $\gamma$  mostra que  $R(t) > n$ , isto é,  $K^n$  não  
718 tem um  $K^t$  monocromático como subgrafo com a coloração  $\gamma$ .*

719 Defina a variável aleatória

$$\begin{aligned} X &= \#\{K^t \text{ monocromático em } K^n \text{ com coloração } \gamma\} \\ &= \sum_{\substack{W \subset V(K^n): \\ |W|=t}} \mathbb{1}_{\{W \text{ induz } K^t \text{ monocromático}\}}. \end{aligned}$$

720 Pela linearidade da esperança, temos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_{\substack{W \subset V(K^n): \\ |W|=t}} \mathbb{P}(\{W \text{ induz } K^t \text{ monocromático}\}) \\ &= \binom{n}{t} 2^{1-\binom{t}{2}} = \binom{n}{t} 2^{1-t^2/2+t/2} \\ &\leq \frac{n^t}{t!} 2^{1-t^2/2+t/2} \leq \frac{(2^{t/2})^t}{t!} 2^{1-t^2/2+t/2} \\ &= \frac{2^{1+t/2}}{t!} < 1, \end{aligned}$$

721 onde a última desigualdade vale se  $t \geq 3$ . Pela desigualdade de Markov,  $\mathbb{P}(X \geq 1) \leq \mathbb{E}(X) < 1$ .

722 Isso termina a prova da Afirmção 48, e o resultado segue.  $\square$

723

## §7. MÉTODO DO 2O MOMENTO

724 Neste método<sup>10</sup> definiremos uma variável aleatória conveniente, calcularemos sua esperança  
725 e variância e aplicaremos a desigualdade de Chebyshev para obter a informação desejada.

<sup>10</sup>Notas produzidas por Gervásio Santos e Marcelo Soares Campos

726 Relembramos a desigualdade de Chebyshev:

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq s\sqrt{\text{Var}(X)}) \leq \frac{1}{s^2} \quad (9)$$

727 Para demonstrar o poder desse método provaremos um teorema de Hardy e Ramanujan. Seja

728  $n \in \mathbb{N}$ , definimos  $\omega(n) = \#$  de divisores primos distintos de  $n$ .

**Teorema 49.** *Seja  $\alpha = \alpha(n)$ , com  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha(n) = +\infty$ . Então para  $(1 - O(\alpha^{-2}))n$  valores de  $m \in [n]$ , temos<sup>11</sup>:*

$$|\omega(m) - \ln(\ln(n))| \leq \alpha\sqrt{\ln(\ln(n))}$$

Seja  $m \in [n]$ , observamos que  $\omega(n) \leq (1 + o(1))\frac{\ln(n)}{\ln(\ln(n))}$ . Claramente  $\omega(m)$  atinge seus valores máximo quando  $m$  é da forma  $m = p_1 p_2 \dots p_k$ <sup>12</sup>. Suponha  $k > (1 + \epsilon)\frac{\ln(n)}{\ln(\ln(n))}$ , nesse caso, temos que  $\omega(m) = k$ . Por outro lado:

$$m = p_1 p_2 \dots p_k \geq k! \geq \left(\frac{k}{e}\right)^k$$

729 Então  $\ln(m) \geq k(\ln(k) - 1) > k\frac{\ln(n)}{\ln(\ln(n))}$ , e teríamos  $k < \ln(\ln(n))$ .

730 Para provar o teorema 49, usaremos dois teoremas famosos sem prová-los:

731 **Teorema 50.** *Seja  $\pi(n) = \#$  de primos menores ou iguais a  $n$ . Então  $\pi(n) = (1 + o(1))\frac{n}{\ln(n)}$ .*

732 **Teorema 51.**  $\sum_{p \leq n} \frac{1}{p} = \ln(\ln(n)) + O(1)$

733 *Demonstração.*

734 Tomaremos um  $m \in_u [n]$  e queremos provar que  $\mathbb{P}(|\omega(m) - \ln(\ln(n))| > \alpha\sqrt{\ln(\ln(n))}) \leq \frac{C}{\alpha^2}$ .

735 Seja  $X = \omega(m)$ , por (9) basta provar que  $\text{Var}(X) = O(\ln(\ln(n)))$  e  $\mathbb{E}[X] = \ln(\ln(n)) + O(1)$ .

736 Calculamos primeiro a esperança de  $X$ . Seja  $X_p = 1(p|m)$ , então  $X = \sum_{p \leq n} X_p$ .

Temos:

$$\mathbb{E}[X_p] = \mathbb{P}(X_p = 1) = \frac{\lfloor \frac{n}{p} \rfloor}{n}$$

737 Logo:

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{n} \leq \mathbb{E}[X_p] \leq \frac{1}{p}$$

738 E portanto temos:

<sup>11</sup>Observe que para todo  $m \geq n^{\frac{1}{e}}$  temos  $\ln(\ln(n)) - 1 \leq \ln(\ln(m)) \leq \ln(\ln(n))$ , ou seja, poderíamos substituir o  $\ln(\ln(n))$  na fórmula por  $\ln(\ln(m))$

<sup>12</sup>no texto  $p$  irá denotar sempre um primo

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{p \leq n} \frac{1}{p} + O(1) = \ln(\ln(n)) + O(1)$$

739 Onde a última igualdade decorre do teorema 51.

740 Agora calculamos a variância de  $X$ . Sabemos que:

$$\text{Var}(X) = \sum_{p \leq n} \text{Var}(X_p) + \sum_{\substack{p_1, p_2 \leq n \\ p_1 \neq p_2}} \text{Cov}(X_{p_1}, X_{p_2})$$

741 E que:

$$\text{Var}(X_p) = \mathbb{E}[X_p^2] - \mathbb{E}[X_p]^2 \leq \mathbb{E}[X_p] \leq \frac{1}{p}$$

742 Também vemos que:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_{p_1}, X_{p_2}) &= \mathbb{E}[X_{p_1} X_{p_2}] - \mathbb{E}[X_{p_1}] \mathbb{E}[X_{p_2}] \\ &= \frac{\lfloor \frac{n}{p_1 p_2} \rfloor}{n} - \frac{\lfloor \frac{n}{p_1} \rfloor \lfloor \frac{n}{p_2} \rfloor}{n} \leq \frac{1}{p_1 p_2} - \frac{1}{p_1 p_2} + \frac{1}{p_1 n} + \frac{1}{p_2 n} \\ &= \frac{1}{n} \left( \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \right) \end{aligned}$$

743 Portanto:

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{p_1, p_2 \leq n \\ p_1 \neq p_2}} \text{Cov}(X_{p_1}, X_{p_2}) &\leq \sum_{\substack{p_1, p_2 \leq n \\ p_1 \neq p_2}} \frac{1}{n} \left( \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \right) \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{p_1 \leq n} \left( \frac{\pi(n)}{p_1} \right) + \sum_{p_2 \leq n} \frac{1}{p_2} \\ &= 2 \frac{\pi(n)}{n} (\ln(\ln(n)) + O(1)) \\ &= o(1) \end{aligned}$$

744 Onde utilizamos o teorema 50 para obter a última igualdade.

745 Percebemos então que  $\text{Var}(X) \leq \ln(\ln(n)) + O(1)$ , e segue o resultado. □

747 Para<sup>13</sup>  $k$  e  $\ell$  inteiros positivos, denotemos por  $G_{k,\ell}$  um grafo arbitrário  $G$  tal que  $\chi(G) \geq k$   
 748 e  $g(G) > \ell$ , onde  $g(G) = \inf\{l : G \supseteq C^\ell\}$  é a cintura de  $G$  (segue da definição de  $g(G)$   
 749 que, se  $G$  é acíclico, então  $g(G) = \infty$ ). B. Descartes (pseudônimo de Tutte) [?], Zykov [?]  
 750 e Mycielski [?] independentemente obtiveram que, para todo  $k$ , existe  $G_{k,3}$  (notemos que a  
 751 propriedade “ $g(G) > 3$ ” equivale a “ $G$  não contém triângulo”). Usando o método probabilístico,  
 752 Erdős [?] provou que, para todo  $k$  e todo  $\ell$ , existe  $G_{k,\ell}$ , e este é o resultado principal a ser  
 753 apresentado nesta seção.

754 Construções de grafos  $G_{k,\ell}$  foram obtidas por Lovász [?], Nešetřil e Rödl [?] e Kříž [?]. Tais  
 755 construções possuem um número extremamente grande de vértices em função de  $k$  e  $\ell$  (um  
 756 número não limitado por uma função torre de altura limitada). Já os grafos de Ramanujan,  
 757 definidos por Margulis [?] e por Lubotzky, Phillips e Sarnak [?], são exemplos de grafos  $G_{k,\ell}$   
 758 com tamanho exponencial. Ao final da prova do Teorema 52, comentamos sobre estimativas  
 759 para o menor número de vértices possível para um grafo  $G_{k,\ell}$ .

760 **Teorema 52** (Erdős, 1959 [?]). *Para todo inteiro  $k \geq 1$  e todo inteiro  $\ell \geq 1$ , existe  $G_{k,\ell}$ .*

*Prova.* Fixe  $k$  e  $\ell$ . Seja  $0 < \vartheta < 1/\ell$ , e  $p = p(n) = n^{\vartheta-1}$ . Seja  $G(n,p)$  o grafo aleatório de ordem  $n$  onde cada aresta é sorteada com probabilidade  $p$ . Mais precisamente, supomos que  $V(G(n,p)) = [n]$  e que, para cada  $\{i,j\} \in \binom{[n]}{2}$ , a probabilidade de  $\{i,j\} \in E(G(n,p))$  é igual a  $p$ , sendo os eventos “ $\{i,j\} \in E(G(n,p))$ ” independentes. Seja  $X = X(G(n,p))$  o número de circuitos de comprimento menor ou igual a  $\ell$  em  $G(n,p)$ . Se  $X_j = \#\{\text{circuitos rotulados em } G(n,p) \text{ de comprimento } j\} = \#\{C^j \hookrightarrow G(n,p)\}$ , então  $X = \sum_{j=3}^{\ell} X_j$ .

Assim,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{j=3}^{\ell} \mathbb{E}(X_j) = \sum_{j=3}^{\ell} \binom{n}{j} p^j \leq \sum_{j=3}^{\ell} (np)^j = \sum_{j=3}^{\ell} n^{\vartheta j} \leq \ell n^{\vartheta \ell} = o(n),$$

pois  $\vartheta \ell < 1$ . Pela desigualdade de Markov (Teorema 44),

$$\mathbb{P}(X > n/2) = o(1).$$

<sup>13</sup>Notas produzidas por Victor Portella e Gabriel Barros

Seja  $a = \lceil 3p^{-1} \ln n \rceil$ . Afirmamos que  $\alpha(G(n, p)) < a$  com probabilidade  $1 - o(1)$ . De fato, se  $Y = \#\{\text{conjuntos independentes com cardinalidade } a \text{ em } G(n, p)\}$ , então

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \binom{n}{a} (1-p)^{\binom{a}{2}} \\ &\leq n^a e^{-pa(a-1)/2} = \left(\exp\left(\ln n - \frac{1}{2}pa + \frac{1}{2}p\right)\right)^a \\ &\leq \left(\exp\left(\ln n - \frac{3}{2}\ln n + \frac{1}{2}\right)\right)^a = \left(\exp\left(-\frac{1}{2}\ln n + \frac{1}{2}\right)\right)^a = o(1). \end{aligned}$$

Pela desigualdade de Markov (Teorema 44),

$$\mathbb{P}(Y \geq 1) = o(1).$$

Portanto, com probabilidade  $1 - o(1)$ , temos  $X \leq n/2$  e  $Y = 0$ . Logo, existe um grafo  $G'$  de  $n$  vértices com no máximo  $n/2$  circuitos de comprimento menor ou igual a  $\ell$  e sem conjuntos independentes de cardinalidade  $a$ . Remova de  $G'$  um vértice de cada circuito de comprimento menor ou igual a  $\ell$ . Seja  $G$  o grafo assim obtido. Temos que  $g(G) > l$  e  $\alpha(G) < 3p^{-1} \ln n = 3n^{1-\vartheta} \ln n$ . Usando que  $|V(G)| \leq \alpha(G)\chi(G)$ , temos

$$\chi(G) \geq \frac{|V(G)|}{3n^{1-\vartheta} \ln n} \geq \frac{n/2}{3n^{1-\vartheta} \ln n} = \frac{n^\vartheta}{6 \ln n}.$$

761 Logo,  $\chi(G) \geq k$  para  $n$  suficientemente grande. □

Ponha  $f(k, \ell) = \min\{|V(G_{k,\ell})|\}$ . Analisando a prova do Teorema 52, pode-se provar que

$$f(k, \ell) \leq (c\ell^2(\ln \ell)k(\ln k))^\ell,$$

onde  $c$  é uma constante absoluta (Exercício: prove que  $f(k, \ell) \leq (30\ell^2(\ln \ell)k(\ln(30k)))^\ell$ ). Logo, para  $\ell$  fixo, temos

$$f(k, \ell) \leq (c_\ell k \ln k)^\ell,$$

e para  $k$  fixo,

$$f(k, \ell) \leq (c_k \ell^2 \ln \ell)^\ell.$$

Outra cota superior (veja [?]) é

$$f(k, \ell) \leq k^{3(\ell+1)}.$$

Quanto a uma cota inferior, temos que  $f(k, \ell) \geq n_0(\ell + 1, k - 1)$ , onde

$$n_0(g, \delta) = \begin{cases} 1 + \frac{\delta}{\delta-2}((\delta-1)^{(g-1)/2} - 1), & g \text{ ímpar} \\ \frac{2}{\delta-2}((\delta-1)^{g/2} - 1), & g \text{ par} \end{cases}$$

762 é a cota de Moore. Isto porque  $G_{k,\ell}$  tem número cromático  $\geq k$ , e portanto,  $G_{k,\ell}$  contém um  
 763 subgrafo  $H$  com  $\delta(H) \geq k - 1$ .

764

## §9. FUNÇÕES LIMIARES

765 Seja  $\Gamma$  um conjunto finito<sup>14</sup> e  $0 < p < 1$  uma probabilidade. Tomamos como espaço amostral  
 766  $\Omega = 2^\Gamma$  e a função de probabilidade  $\mathbb{P}(\Gamma_p = T) = p^{|T|}(1-p)^{|\Gamma|-|T|}$ .

767 **Definição 53.** *Seja  $P \subset \Omega$  uma propriedade. Dizemos que  $P$  é **monótona crescente** se*

$$\forall A, B \in \Gamma, A \subset B, A \in P \longrightarrow B \in P$$

768 *Analogamente,  $P$  é **monótona decrescente** se*

$$\forall A, B \in \Gamma, B \subset A, A \in P \longrightarrow B \in P$$

769 Se  $P$  é uma propriedade crescente, dizemos que  $P$  é um *upset* ("fechado para cima"). No caso  
 770 decrescente, chamamos  $P$  de *downset*.

771 Em geral estamos interessados em  $\mathbb{P}(\Gamma_p \in P)$ , ou seja, na probabilidade de um elemento de  $2^\Gamma$   
 772 estar em  $P$ . Esta probabilidade é por vezes denotada como  $\pi_{p,P}$ .

773 Temos que se  $P$  é crescente então  $P^C$  (seu complemento) deve ser decrescente. Além disso,  
 774 para  $P$  crescente vale:

$$p_1 < p_2 \longrightarrow \mathbb{P}(\Gamma_{p_1} \in P) < \mathbb{P}(\Gamma_{p_2} \in P)$$

775 Além disso, se  $P$  é crescente, ela deve conter  $\Gamma$ . Analogamente, uma propriedade decrescente  
 776 deve conter  $\emptyset$ . Uma propriedade que contém ambos é tal que  $P = 2^\Gamma$  e é trivial.

777 Em geral temos que  $\Gamma = \Gamma(n)$  e  $p = p(n)$  são funções de  $n$  e  $|\Gamma| \rightarrow \infty$  conforme  $n \rightarrow \infty$  e  
 778 estamos interessados no comportamento de  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\Gamma_p \in P) = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi_{p,P}$ .

779 Alguns exemplos de espaços de probabilidade com os quais estamos interessados incluem:

780 (1)  $\mathcal{G}(n, p)$ , o espaço de grafo aleatórios de Erdős-Rényi. Nele temos um conjunto finito de  
 781 vértices  $V$  (tipicamente,  $V = [n]$ ) e tomamos  $\Gamma = \binom{V}{2}$

782 Algumas propriedades interessantes desse espaço incluem:

783 (a)  $P_H = \{H \subset \mathcal{G}(n, p)\}$ , para  $H$  fixo. Essa é uma propriedade crescente, uma vez que  
 784 se  $H$  é subgrafo de  $G$  e  $G$  é subgrafo de  $F$ , então  $H$  também é subgrafo de  $F$ .

<sup>14</sup>Notas produzidas por Gervásio Santos e Marcelo Soares Campos

785 (b)  $P = \{\mathcal{G}(n, p) \text{ é conexo}\}$ . Uma outra propriedade crescente, pois estamos fixando o  
 786 conjunto de vértices, Se temos que  $G_1$  é conexo,  $G_1 \subset G_2$  e  $V(G_1) = V(G_2)$ , então  
 787  $G_2$  também deve ser conexo.

788 (2) Se tomamos  $\Gamma = [n]$ , então  $[n]_p$  é um subconjunto aleatório binomial de  $[n]$ . Um exemplo  
 789 de propriedade interessante e crescente é  $P = \{[n]_p \text{ contém uma PA com 3 elementos}\}$ .

790 (3) Tomando  $\Gamma = 2^{[n]}$  temos que  $\Gamma_p$  é uma família de conjuntos  $\mathcal{F}$  aleatória. Uma propriedade  
 791 interessante e *decrecente* que pode nos interessar nesse caso é  $P = \{\mathcal{F} \text{ é Sperner}\}$ .

792 Em todos os exemplos acima, há um fenômeno de "transição de fase". Isto é, existe um  $p^*$  tal  
 793 que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\Gamma_p \in P) = \begin{cases} 0, & \text{se } p \gg p^* \quad \textbf{(0-afirmação)} \\ 1, & \text{se } p \ll p^* \quad \textbf{(1-afirmação)} \end{cases} \quad (10)$$

794 Tal  $p^*$  recebe o nome de **função limiar** para  $P$ .

795 **Sobre Notação:** Sejam  $f = f(n)$  e  $g = g(n)$ . Adotemos as seguintes convenções de notações:

796 (1)  $f \ll g \equiv f = o(g)$

797 (2)  $f \gg g \equiv g = o(f)$

798 (3)  $f \asymp g \equiv f = \Theta(g)$

799 **9.1. Continência de subgrafos pequenos.** Vamos nos focar em calcular a função limiar para  
 800 o propriedade crescente em  $\mathcal{G}(n, p)$  de conter um grafo  $H$  fixo.

Seja  $H$  um grafo fixo;  $e(H) = |E(H)|$  e  $v(H) = |V(H)|$ . Definimos a densidade de  $H$  como

$$d(H) = \frac{e(H)}{v(H)}$$

801 Seja  $\#\{H \hookrightarrow G\}$  o número de injções  $V(H) \rightarrow V(G)$  que preservam arestas, ou seja, o  
 802 número de homomorfismos injtores. Vamos definir a variável aleatória  $X_H = \#\{H \hookrightarrow \mathcal{G}(n, p)\}$ .

803 Temos:

$$X_H = \sum_f X_f$$

804 onde  $f : V(H) \rightarrow V(\mathcal{G}(n, p))$  itera sobre as injções de  $V(H)$  em  $V(\mathcal{G}(n, p))$  e  $X_f =$   
 805  $\mathbb{1}\{f \text{ é um homomorfismo}\}$

806 Temos:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_H] &= \mathbb{E}\left[\sum_f X_f\right] \\
&= \sum_f \mathbb{E}[X_f] \\
&= \sum_f \mathbb{P}(f \text{ é homomorfismo})
\end{aligned}$$

807 A probabilidade de uma injeção  $f$  ser um homomorfismo é  $\mathbb{P}(f \text{ é homomorfismo}) = p^{e(H)}$ , que  
808 é probabilidade de escolhermos todas as arestas "corretamente".

809 Além disso, temos que  $|\{f \text{ é homomorfismo}\}| = (n)_{v(H)} = n(n-1)\cdots(n-v(H)+1)$ . Assim:

$$\mathbb{E}[X_H] = (n)_{v(H)} p^{e(H)} \asymp n^{v(H)} p^{e(H)} = \left(n^{1/d(H)} p\right)^{e(H)}$$

810 Assim, se  $n^{1/d(H)} p \rightarrow 0$ , ou, equivalentemente, se  $p \ll n^{-1/d(H)}$ , temos:

$$\mathbb{P}(H \subset \mathcal{G}(n, p)) = \mathbb{P}(X_H \geq 1) \leq \mathbb{E}[X_H] \asymp n^{v(H)} p^{e(H)} = o(1)$$

811 Isto prova a 0-afirmação para  $p^* = n^{-1/d(H)}$ . Contudo, para este  $p^*$  não é possível provar a  
812 1-afirmação.

Tome por exemplo o seguinte grafo:

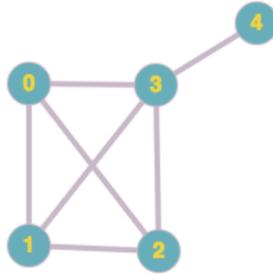


FIGURA 1. Grafo  $H$  de exemplo com  $v(H) = 5$  e  $e(H) = 7$

813

814 Temos que  $d(H) = 7/5$ . Se tomamos  $p = p(n) = \omega n^{-5/7}$ , com  $\omega = \omega(n) \rightarrow \infty$  (por exemplo,  
815  $\omega(n) = n^{1/100}$ ) temos:

$$\mathbb{E}[X_H] \asymp (n^{5/7} p)^7 = \omega^7 \rightarrow \infty$$

Mas

$$\mathbb{E}\left[\#\{K^4 \hookrightarrow \mathcal{G}(n, p)\}\right] \asymp (n^{2/3} p)^6 = o(1)$$

816 para um  $\omega$  suficientemente pequeno, i.e.  $\omega = o(n^{1/21})$ .

817 Isto é, temos que:

818 i.  $\mathbb{E} [\#\{K^4 \hookrightarrow \mathcal{G}(n, p)\}] \rightarrow 0$ , mas

819 ii.  $\mathbb{E} [\#\{H \hookrightarrow \mathcal{G}(n, p)\}] \rightarrow \infty$

820 Mas  $\mathbb{P}(H \subset \mathcal{G}(n, p)) \leq \mathbb{P}(K^4 \subset \mathcal{G}(n, p)) = o(1)$ .

821 Este resultado pode parecer paradoxal, mas considere por exmplo o grafo abaixo:

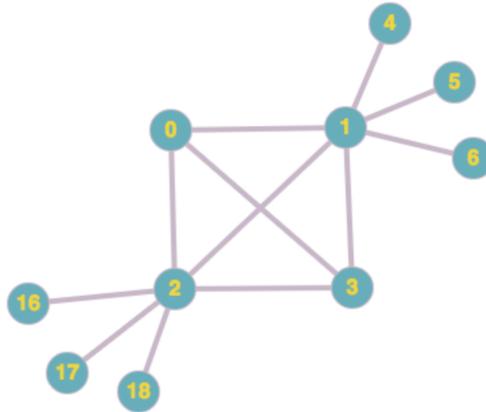


FIGURA 2. Grafo com muitas cópias de  $H$  mas apenas uma de  $K^4$

822 Há 6 homomorfismos diferentes de  $H$  para este grafo, mas apenas um de  $K^4$ . Ou seja, não  
823 necessariamente um grafo com muitas cópias de  $H$  terá muitas cópias de  $K^4$ . Como a esperança  
824 é uma média, alguns grafos que possuam muitas cópias de  $H$  podem "enviesar" a esperança de  
825  $X_H$ . Isso serve para ilustrar que não é contraditório a esperança de  $\mathcal{G}(n, p)$  conter  $H$  ir para o  
826 infinito, mas a de conter  $K^4$  não.

827 Vamos definir  $m(H) = \max \{d(H') : H' \subset H, v(H') > 0\}$ . Por exemplo, para o grafo  $H$  da  
828 Figura 1 temos que  $m(H) = d(K^4) = 3/2$ .

829 **Definição 54.** Dizemos que um grafo  $G$  é *balanceado* se  $m(G) = d(G)$ .

830 **Teorema 55. (Erdős-Rényi '60)** Seja  $H$  um grafo balanceado. Então  $p = n^{-1/d(H)}$  é função  
831 limiar da propriedade  $\{\mathcal{G}(n, p) \text{ contém } H\}$ .

832 **Teorema 56. (Erdős-Rényi / Bollobás '81)** A função limiar da propriedade  $P = P_H =$   
833  $\{H \subset \mathcal{G}(n, p)\}$  é  $p^* = n^{-1/m(H)}$ .

834 Apresentaremos uma prova deste teorema devida a Rucinski e Vince, mas antes precisamos  
835 de um resultado sobre a variância  $\text{Var} [\#\{H \hookrightarrow \mathcal{G}(n, p)\}]$ .

836 Definimos:

$$\Phi_H = \Phi_H(n, p) = \min \{ \mathbb{E} [\# \{H' \hookrightarrow \mathcal{G}(n, p)\}] : H' \subset H, e(H') > 0 \}$$

Como temos  $\mathbb{E} [\# \{H' \hookrightarrow \mathcal{G}(n, p)\}] \asymp n^{v(H')} p^{e(H')}$ , vamos ter

$$\Phi_H \asymp \min_{H' \subset H, e(H') > 0} n^{v(H')} p^{e(H')}$$

837 **Lema 57.** *Seja  $H$  com  $e(H) > 0$ . Então*

$$\begin{aligned} \text{Var} [\# \{H \hookrightarrow \mathcal{G}(n, p)\}] &\asymp (1-p) \sum_{H' \subset H, e(H') > 0} n^{2v(H)-v(H')} p^{2e(H)-e(H')} \\ &\asymp (1-p) \max_{H' \subset H, e(H') > 0} (\mathbb{E} [\# \{H \hookrightarrow \mathcal{G}(n, p)\}])^2 / \mathbb{E} [\# \{H' \hookrightarrow \mathcal{G}(n, p)\}] \\ &\asymp (1-p) (\mathbb{E} [\# \{H \hookrightarrow \mathcal{G}(n, p)\}])^2 / \Phi_H \end{aligned}$$

*Demonstração.* Temos

$$\text{Var} [\# \{H \hookrightarrow \mathcal{G}(n, p)\}] = \sum_f \sum_{f'} \text{Cov}(X_f, X_{f'})$$

838 Se  $f(E(H)) \cap f'(E(H)) = \emptyset$ , então  $X_f$  e  $X_{f'}$  são independentes e  $\text{Cov}(X_f, X_{f'}) = 0$ . Então  
 839 podemos nos restringir apenas aos casos em que  $f(E(H)) \cap f'(E(H)) \neq \emptyset$ . Denotando por  
 840  $H'' := f(E(H)) \cap f'(E(H))$ , temos:

$$\begin{aligned} \text{Var} [\# \{H \hookrightarrow \mathcal{G}(n, p)\}] &= \sum_f \sum_{f'} \text{Cov}(X_f, X_{f'}) \\ &\asymp \sum_{H'' \subset H, e(H'') > 0} n^{2v(H)-v(H'')} (p^{2e(H)-e(H'')} - p^{2e(H)}) \\ &= \sum_{H'' \subset H, e(H'') > 0} n^{2v(H)-v(H'')} p^{2e(H)-e(H'')} (1 - p^{e(H'')}) \\ &\asymp (1-p) \sum_{H'' \subset H, e(H'') > 0} n^{2v(H)-v(H'')} p^{2e(H)-e(H'')} \\ &\asymp (1-p) \max_{H' \subset H, e(H') > 0} (\mathbb{E} [\# \{H \hookrightarrow \mathcal{G}(n, p)\}])^2 / \mathbb{E} [\# \{H' \hookrightarrow \mathcal{G}(n, p)\}] \\ &\asymp (1-p) (\mathbb{E} [\# \{H \hookrightarrow \mathcal{G}(n, p)\}])^2 / \Phi_H \quad \square \end{aligned}$$

841 Agora podemos apresentar a prova do Teorema 56:

842 *Demonstração.* (Devida a Rucinski e Vince, '85)

843 Como temos que  $n^{-1/d(H)} \leq n^{-1/m(H)}$ , e já vimos que quando  $p \ll n^{-1/d(H)}$  temos que  
 844  $\mathbb{P}(H \subseteq \mathcal{G}(n, p)) \rightarrow 0$ , já provamos a 0-afirmação para este  $p^*$ . Precisamos, portanto, provar  
 845 apenas a 1-afirmação.

846 Para provar a 1-afirmação podemos usar o método do segundo momento. Seja  $X_H =$   
 847  $\#\{H \hookrightarrow \mathcal{G}(n, p)\}$ ; temos:

$$\mathbb{P}(X_H = 0) \leq \mathbb{P}(|X_H - \mathbb{E}[X_H]| \geq \mathbb{E}[X_H]) \leq \frac{\text{Var}[X_H]}{(\mathbb{E}[X_H])^2}$$

Pelo Lema 57 temos que  $\text{Var}[X_H] \asymp (1-p)^{\frac{(\mathbb{E}[X_H])^2}{\Phi_H}}$ . Então temos que

$$\mathbb{P}(X_H = 0) \leq \frac{1-p}{\Phi_H}$$

848 Como  $\Phi_H \asymp (n^{-1/m(H)}p)^c$ , onde  $c$  depende de  $H$  mas não de  $n$  e  $p \gg n^{-1/m(H)}$ , temos que  
 849  $1/\Phi_H = o(1)$ .

850 Logo, se  $p \gg n^{-1/m(H)}$ ,  $\mathbb{P}(\mathcal{G}(n, p) \in P_H) = \mathbb{P}(X_H \geq 1) \rightarrow 1$  conforme  $n \rightarrow \infty$ .  $\square$

## 851 9.2. Continência de subgrafos pequenos em $G(n, p)$ . <sup>15</sup>

852 Lembremos que  $m(H)$  é a razão entre o número de arestas e o número de vértices no subgrafo  
 853 mais denso de  $H$ , isto é,

$$m(H) = \max \left\{ \frac{e(J)}{v(J)} : J \subset H, v(J) > 0 \right\}. \quad (11)$$

854 Pela desigualdade de Chebyshev (Teorema 45), temos que

$$\mathbb{P}(X_H = 0) \leq \frac{\text{Var}(X_H)}{\mathbb{E}(X_H)^2}. \quad (12)$$

855 Para provar a 1-afirmação no Teorema ??, queremos mostrar que  $\text{Var}(X_H) / \mathbb{E}(X_H)^2 = o(1)$ .

856 **Lema 58.** *Seja  $H$  um grafo fixo com  $e(H) > 0$ . São equivalentes:*

- 857 (i)  $np^{m(H)} \rightarrow \infty$ ;
- 858 (ii)  $n^{v(J)}p^{e(J)} \rightarrow \infty$  para todo  $J \subset H$  com  $v(J) > 0$ ;
- 859 (iii)  $\mathbb{E}(X_J) \rightarrow \infty$  para todo  $J \subset H$  com  $v(J) > 0$ ;
- 860 (iv)  $\Phi_H \rightarrow \infty$ .

861 *Prova.* De (11) e porque  $p \leq 1$ , vale que  $np^{m(H)} \leq np^{e(J)/v(J)}$  para todo  $J \subset H$  com  $v(J) > 0$ .  
 862 Logo,  $np^{m(H)} \rightarrow \infty$  se, e somente se,  $n^{v(J)}p^{e(J)} = (np^{e(J)/v(J)})^{v(J)} \rightarrow \infty$  para todo  $J \subset H$  com  
 863  $v(J) > 0$ . Assim, (i) e (ii) são equivalentes. Como  $\mathbb{E}(X_J) \asymp n^{v(J)}p^{e(J)}$ , temos que (ii) equivale

<sup>15</sup>Notas produzidas por Victor Portella e Gabriel Barros

864 a (iii). Pela definição de  $\Phi_H$ , (iv) equivale a  $\mathbb{E}(X_J) \rightarrow \infty$  para todo  $J \subset H$  com  $e(J) > 0$ ; isto  
 865 equivale a (iii) (o caso  $v(J) > 0$  e  $e(J) = 0$  é trivial:  $n^{v(J)} \rightarrow \infty$  quando  $n \rightarrow \infty$ ).  $\square$

866 *Prova da 1-afirmação no Teorema ??*. Temos que  $p \gg p_*^H = n^{-1/m(H)}$  equivale a  $n^{1/m(H)}p =$   
 867  $(np^{m(H)})^{1/m(H)} \rightarrow \infty$ , que, pelo Lema 58, equivale a  $\Phi_H \rightarrow \infty$ . Assim, por 12 e pelo Lema ??,

$$\mathbb{P}(X_H = 0) \leq \frac{\text{Var}(X_H)}{\mathbb{E}(X_H)^2} = O(1/\Phi_H) = o(1). \quad \square$$

868 Uma observação final é que pode-se mostrar que  $\mathbb{P}(H \not\rightarrow G(n, p)) \leq \exp(-\Theta(\Phi_H))$  (o que  
 869 vimos é que  $\mathbb{P}(H \not\rightarrow G(n, p)) \leq O(1/\Phi_H)$ ) (veja [?]).

870 **9.3. Conexidade.** Aqui  $\mathcal{P} = \{G(n, p) \text{ conexo}\}$ . Temos que  $p_*^{\text{conexo}} = (\ln n)/n$  é função limiar  
 871 para conexidade. Provaremos um resultado bem mais forte.

**Teorema 59** (Erdős e Rényi, 1959 [?]). *Seja  $p = p(n) = (\ln n + \alpha(n))/n$ . Então,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(G(n, p) \text{ é conexo}) = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha(n) \rightarrow -\infty \\ 1 & \text{se } \alpha(n) \rightarrow \infty \end{cases}$$

*Prova.* Começemos com a prova da 0-afirmação. Seja  $X_k$  o número de componentes com  $k$   
 vértices em  $G(n, p)$ . Em particular,  $X_1$  é o número de vértices isolados em  $G(n, p)$ . Temos que

$$\mathbb{E}(X_1) = n(1-p)^{n-1} \sim ne^{-pn} = ne^{-(\ln n + \alpha)} = e^{-\alpha}.$$

Queremos provar que  $\mathbb{P}(X_1 = 0) = o(1)$ . Temos que a v.a.  $X_1(X_1 - 1)$  conta os pares ordenados  
 de vértices isolados distintos, e

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_1(X_1 - 1)) &= n(n-1)(1-p)^{2(n-1)-1} \\ &\leq \frac{n^2(1-p)^{2n-2}}{1-p} \\ &= \frac{\mathbb{E}(X_1)^2}{1-p} \\ &\leq \mathbb{E}(X_1)^2(1+2p). \quad [\text{para } p \leq 1/2] \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \text{Var}(X_1) &= \mathbb{E}(X_1(X_1 - 1)) + \mathbb{E}(X_1) - \mathbb{E}(X_1)^2 \\ &\leq \mathbb{E}(X_1)^2(1+2p) + \mathbb{E}(X_1) - \mathbb{E}(X_1)^2 \\ &= \mathbb{E}(X_1)^2 \left( 2p + \frac{1}{\mathbb{E}(X_1)} \right) = o(\mathbb{E}(X_1)^2). \end{aligned}$$

Assim,

$$\mathbb{P}(G(n, p) \text{ é conexo}) \leq \mathbb{P}(X_1 = 0) \leq \frac{\text{Var}(X_1)}{\mathbb{E}(X_1)^2} = o(1),$$

872 e está provada a 0-afirmação.

Agora consideremos a 1-afirmação. Temos que

$$\mathbb{P}(G(n, p) \text{ é desconexo}) \leq \mathbb{P}(X_k > 0 \text{ para algum } k \leq n/2) \leq \sum_{k \leq n/2} \mathbb{P}(X_k > 0)$$

e

$$\mathbb{P}(X_k > 0) \leq \sum_{S \subset V, |S|=k} \mathbb{P}(S \text{ é componente de } G(n, p)) \leq \binom{n}{k} (1-p)^{k(n-k)}.$$

Logo,

$$\mathbb{P}(G(n, p) \text{ é desconexo}) \leq \sum_{1 \leq k \leq n/2} \binom{n}{k} (1-p)^{k(n-k)}$$

A seguir, dividimos o somatório em duas partes e mostramos que cada uma delas é  $o(1)$ :

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq k \leq n^{3/4}} \binom{n}{k} (1-p)^{k(n-k)} &\leq \sum_{1 \leq k \leq n^{3/4}} \left(\frac{en}{k}\right)^k e^{-pk(n-k)} \\ &= \sum_{1 \leq k \leq n^{3/4}} (k^{-1} \exp(1 - \alpha + k(\ln n + \alpha)/n))^k \\ &\leq \sum_{1 \leq k \leq n^{3/4}} (\exp(1 - \alpha + n^{-1/4}(\ln n + \alpha)))^k \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} (\exp(1 + (n^{-1/4} - 1)\alpha + n^{-1/4} \ln n))^k \\ &= \frac{\exp(1 + (n^{-1/4} - 1)\alpha + n^{-1/4} \ln n)}{1 - \exp(1 + (n^{-1/4} - 1)\alpha + n^{-1/4} \ln n)} \quad [\text{para } n \geq n_0] \\ &= o(1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n^{3/4} < k \leq n/2} \binom{n}{k} (1-p)^{k(n-k)} &\leq \sum_{n^{3/4} < k \leq n/2} (k^{-1} \exp(1 - \alpha + k(\ln n + \alpha)/n))^k \\ &\leq \sum_{n^{3/4} < k \leq n/2} \left(n^{-3/4} \exp(1 - \alpha + \frac{1}{2}(\ln n + \alpha))\right)^k \\ &= \sum_{n^{3/4} < k \leq n/2} (\exp(1 - \frac{1}{4} \ln n - \frac{1}{2}\alpha))^k \\ &\leq \left(\frac{1}{2}n - n^{3/4}\right) (\exp(1 - \frac{1}{4} \ln n - \frac{1}{2}\alpha))^{n^{3/4}} \\ &= o(1). \end{aligned}$$

873 Portanto,  $\mathbb{P}(G(n, p) \text{ é desconexo}) \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$  e  $\alpha(n) \rightarrow \infty$ , e está provada a

874 1-afirmação. □

876 10.1. **Um problema geométrico.** Para  $x, y, z \in \mathbb{R}^d$  distintos<sup>16</sup>, denotamos por  $\sphericalangle xyz \in [0, \pi]$   
 877 o menor ângulo formado pelos vetores  $x - y$  e  $z - y$ . Para todo  $d \in \mathbb{N}$ , defina

$$f_{<\vartheta}(d) = \max\{|S| : S \subset \mathbb{R}^d \text{ tal que } \sphericalangle xyz < \vartheta \forall x, y, z \in S \text{ distintos}\}.$$

878 Definimos  $f_{\leq\vartheta}(d)$  de forma análoga. Um problema interessante é o de determinar o valor  
 879 de  $f_{\leq\pi/2}(d)$ . Erdős [9] conjecturou que  $f_{\leq\pi/2}(d) \leq 2^d$  para todo  $d \in \mathbb{N}$ , que mais tarde foi  
 880 provada por Danzer e Grünbaum [4] de forma bem direta. Nessa seção, estamos interessados  
 881 em investigar cotas para  $f_{<\pi/2}(d)$ , que apesar de sua formulação ser levemente diferente a  
 882 de  $f_{\leq\pi/2}(d)$ , parece ser um problema mais complicado.

883 É fácil ver que  $f_{<\pi/2}(1) = 2$ . Além disso, temos que  $f_{<\pi/2}(2) = 3$ . Para ver isso, seja  $S \subset \mathbb{R}^2$   
 884 um conjunto de 4 pontos distintos. O caso onde o fecho convexo de  $S$  é uma reta é trivial. Caso  
 885 o fecho convexo de  $S$  seja um triângulo, existe algum ponto de  $S$  que não é vértice desse mesmo  
 886 triângulo, e assim formará um ângulo de tamanho pelo menos  $2\pi/3$  com dois dos três vértices  
 887 da casca convexa de  $S$ . Agora, caso a casca convexa de  $S$  seja um quadrilátero, temos que um  
 888 dos ângulos internos desse quadrilátero é pelo menos  $\pi/2$ , pois sabemos que a soma dos ângulos  
 889 internos de um quadrilátero é  $2\pi$ . Por último, note que  $f_{<\pi/2}(2) \geq 3$ , pois podemos escolher um  
 890 conjunto de 3 tais que formem um triângulo acutângulo. Croft mostrou em [3] que  $f_{<\pi/2}(3) = 5$ .  
 891 Dados esses exemplos iniciais, a seguinte conjectura feita por Danzer e Grünbaum parece valer.

892 **Conjectura 60.** Para todo  $d \in \mathbb{N}$ , vale que  $f_{<\pi/2}(d) \leq 2d - 1$ .

893 O seguinte teorema mostra, de forma surpreendente, que a conjectura é falsa, isto é,  $f_{<\pi/2}(d)$   
 894 cresce muito mais rápido que  $2d$ .

895 **Teorema 61** ([8]). Para todo  $d \in \mathbb{N}$ ,

$$f_{<\pi/2}(d) \geq \left\lfloor \frac{1}{2} \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \right)^d \right\rfloor = \lfloor 0.5(1.154\dots)^d \rfloor.$$

896 *Demonstração.* Sejam  $m = \lfloor 1/2(2/3)^d \rfloor$  e  $x_1, \dots, x_{2m} \in_U \{0, 1\}^d$  independentes. Vamos primeiro  
 897 provar a seguinte afirmação:

898 **Afirmação 62.** Sejam  $x, y \in_U \{0, 1\}^d$  independentes e  $\vartheta = \sphericalangle x0y$ . Então,  $\vartheta \leq \pi/2$  e

$$\mathbb{P}\left(\vartheta = \frac{\pi}{2} \text{ ou } x = 0 \text{ ou } y = 0\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^d. \quad (13)$$

<sup>16</sup>Notas produzidas por Victor Portella e Gabriel Barros

899 Note que  $0 \leq \langle x, y \rangle = \|x\| \|y\| \cos \vartheta$ , o que já mostra que  $\vartheta \leq \pi/2$ . Além disso, vemos que o  
900 evento em (13) acontece se e somente se  $\langle x, y \rangle = 0$ , o que equivale a  $\text{supp}(x) \cap \text{supp}(y) = \emptyset$ . Ou  
901 seja, para todo  $i \in [d]$ , temos 3 possibilidades: ou  $x_i = y_i = 0$ , ou  $x_i = 1$  e  $y_i = 0$ , ou  $x_i = 0$   
902 e  $y_i = 1$ . Esse último evento claramente acontece com probabilidade  $(3/4)^d$ . Isso termina a  
903 prova da afirmação 62.

904 Com isso, temos que

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left( \# \left\{ (i, \{j, k\}) \in [2m] \times \binom{[2m]}{2} : \begin{array}{l} i, j, k \text{ distintos, e } \angle x_j x_i x_k = \pi/2 \\ \text{ou } x_j = x_i \text{ ou } x_k = x_i \end{array} \right\} \right) \\ &= 3 \binom{2m}{3} \left(\frac{3}{4}\right)^d \leq 3 \frac{(2m)^3}{3!} \left(\frac{3}{4}\right)^d = 4m^3 \left(\frac{3}{4}\right)^d \leq m, \end{aligned} \quad (14)$$

905 onde a última desigualdade vale pois,

$$4m^3 \left(\frac{3}{4}\right)^d \leq m \iff m^2 \leq \left(\frac{4}{3}\right)^d \frac{1}{4} \iff m \leq \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^d \frac{1}{2}.$$

906 Portanto, existem  $2m$  pontos  $x_1, \dots, x_{2m} \in \{0, 1\}^d$  tais que o número de pares  $(i, \{j, k\}) \in$   
907  $[2m] \times \binom{[2m]}{2}$  com  $i, j$  e  $k$  distintos tais que  $\angle x_j x_i x_k = \pi/2$  ou  $x_j = x_i$  ou  $x_k = x_i$  é menor ou igual  
908 a  $m$ . Fixe tal coleção de  $2m$  pontos e denote-a por  $X$ . Remova de  $X$  os pontos  $x_i$  tais que  $(i, \{j, k\}) \in$   
909 tem a propriedade já mencionada, para algum par de inteiros distintos  $j, k \in [2m] \setminus \{i\}$ . Sobram  $m$   
910 pontos, o que prova que  $f_{<\pi/2}(d) \geq m$ .  $\square$

911 Resultados recentes sobre esse problema foram obtidos em [13].

912 **Observação 63.** Podemos modificar a prova acima para provar um limitante inferior levemente  
913 melhor. Para isso, basta escolher  $3m$  pontos com

$$m = \left\lfloor \frac{\sqrt{6}}{9} \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^d \right\rfloor.$$

914 Conseguimos provar com esses valores a desigualdade de (14), e assim provamos que  $f_{<\pi/2}(d) \geq$   
915  $2m$ .

916 Relacionado a esse problema, é possível provar que, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal  
917 que  $f_{\leq \pi/3 + \varepsilon}(d) \geq (1 + \delta)^d$ . Tal resultado é interessante, pois sabemos que  $f_{\leq \pi/3}(d) \leq d + 1$ .  
918 Para ver esse último fato, basta ver que quaisquer 3 pontos formam um ângulo de tamanho pelo  
919 menos  $\pi/3$ . Portanto, os conjuntos levados em conta no cálculo de  $f_{\leq \pi/3}(d)$  são os conjuntos de  
920 pontos tais que todo trio de pontos distintos forma um ângulo de tamanho  $\pi/3$ , ou seja, tais  
921 pontos são equidistantes. Por fim, é possível provar que um conjunto de pontos equidistante é  
922 afim independente.

923 10.2. **Cotas para a distribuição binomial.** Seja  $X$  uma variável aleatória e seja  $p \in [0, 1]$ .  
 924 Dizemos que  $X$  tem **distribuição de Bernoulli** se  $\mathbb{P}(X = 1) = p$  e  $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$ .  
 925 Nesse caso, escrevemos  $X \sim \text{Be}(p)$ . Seja  $n \in \mathbb{N}$ . Dizemos que  $X$  tem **distribuição binomial**  
 926 se  $X = \sum_{i=1}^n X_i$ , onde  $X_1, \dots, X_n$  são variáveis aleatórias independentes tais que  $X_i \sim \text{Be}(p)$ .  
 927 Nesse caso, escrevemos  $X \sim \text{Bi}(n, p)$ . No resto desta seção,  $X \sim \text{Bi}(n, p)$  é uma variável aleatória  
 928 fixada. Além disso, ponha

$$\mu = \mathbb{E}(X) = np \quad \text{e} \quad \sigma^2 = \text{var}(X) = \sum_{i=1}^n \text{var}(X_i) = np(1 - p).$$

929 Pela desigualdade de Chebyshev (Teorema 45),

$$\mathbb{P}(|X - \mu| \geq t) \leq \frac{\text{var}(X)}{t^2}, \quad \forall t > 0.$$

930 Assim, se  $t = \alpha\sigma = \alpha\sqrt{np(1 - p)}$  para algum  $\alpha > 0$ , então

$$\mathbb{P}(|X - \mu| \geq t) \leq \frac{1}{\alpha^2}.$$

931 De forma similar, se  $t = \varepsilon\mu$  para algum  $\varepsilon > 0$ , então

$$\mathbb{P}(|X - \mu| \geq t) \leq \frac{np(1 - p)}{\varepsilon^2 n^2 p^2} \leq \frac{1}{\varepsilon^2 \mu}.$$

932 10.2.1. *Cotas exponenciais.* Um fato interessante sobre a distribuição binomial é que existem  
 933 cotas que decrescem de forma exponencial para diversos eventos envolvendo variáveis que possuem  
 934 tal distribuição. Algumas cotas simples são

935 (1)  $\mathbb{P}(X = 0) = (1 - p)^n \leq e^{-pn} = e^{-\mu},$

936 (2) para todo  $t > 0$  inteiro, vale

$$\mathbb{P}(X \geq t) \leq \binom{n}{t} p^t \leq \left(\frac{en}{t}\right)^t p^t = \left(\frac{e\mu}{t}\right)^t,$$

937 onde a primeira desigualdade corresponde à cota da união considerando que o evento  $\{X \geq$   
 938  $t\}$  pode ser escrito como

$$\bigcup_{T \subset [n]: |T|=t} \{X_i = 1 \text{ para todo } i \in T\}.$$

939 Note que, se  $t = c\mu$  para  $c > 1$ , então  $\mathbb{P}(X \geq t) \leq c^{-t}$ .

940 Muitas vezes, estamos interessados em limitar a probabilidade de pequenos desvios do valor  
 941 de  $X$  com relação a sua esperança. Usando a desigualdade de Markov (Teorema 44),

942 (1) para todos  $u > 0$  e  $t \geq 0$ ,

$$\mathbb{P}(X \geq \mu + t) = \mathbb{P}(e^{uX} \geq e^{u(\mu+t)}) \leq \frac{\mathbb{E}(e^{uX})}{e^{u(\mu+t)}}.$$

943 (2) para todos  $u < 0$  e  $t \geq 0$ ,

$$\mathbb{P}(X \leq \mu - t) = \mathbb{P}(e^{uX} \geq e^{u(\mu-t)}) \leq \frac{\mathbb{E}(e^{uX})}{e^{u(\mu-t)}}.$$

944 Usando que  $X = \sum_{i=1}^n X_i$ , onde  $X_1, \dots, X_n$  são independentes com  $X_i \sim \text{Be}(p)$ , temos que

$$\mathbb{E}(e^{uX}) = \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^n e^{uX_i}\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}(e^{uX_i}) = (1 - p + pe^u)^n.$$

945 Seja  $t \in [0, n - \mu)$ . Então,

$$\mathbb{P}(X \geq \mu + t) \leq e^{-u(\mu+t)}(1 - p + pe^u)^n.$$

946 Escolhendo  $u \in \mathbb{R}$  tal que

$$e^u = \frac{(\mu + t)(1 - p)}{(n - \mu - t)},$$

947 obtemos

$$\mathbb{P}(X \geq \mu + t) \leq \left(\frac{\mu}{\mu + t}\right)^{\mu+t} \left(\frac{n - \mu}{n - \mu - t}\right)^{n-\mu-t}. \quad (15)$$

948 **Teorema 64.** Defina  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  pela formula

$$\varphi(x) = \begin{cases} (1+x)\ln(1+x) - x & \text{se } x > -1, \\ -\infty & \text{se } x \leq -1, \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

949 Seja  $X \sim \text{Bi}(n, p)$ , e ponha  $\mu = np$ . Então, para todo  $t \geq 0$ , vale

$$\mathbb{P}(X \geq \mu + t) \leq \exp\{-\mu\varphi(t/\mu)\} \leq \exp\left\{\frac{-t^2}{2(\mu + t/3)}\right\} \quad (16)$$

950 e

$$\mathbb{P}(X \leq \mu - t) \leq \exp\{-\mu\varphi(-t/\mu)\} \leq \exp\left\{\frac{-t^2}{2\mu}\right\}. \quad (17)$$

951 *Demonstração.* Note que, para  $0 \leq t < n - \mu$

$$\begin{aligned}
& -\mu\varphi(t/\mu) - (n - \mu)\varphi(-t/(n - \mu)) \\
&= -\mu\left(\left(\frac{\mu + t}{\mu}\right)\ln\left(\frac{\mu + t}{\mu}\right) - \frac{t}{\mu}\right) \\
&\quad - (n - \mu)\left(\left(\frac{n - \mu - t}{n - \mu}\right)\ln\left(\frac{n - \mu - t}{n - \mu}\right) + \frac{t}{n - \mu}\right) \\
&= -\left((\mu + t)\ln\left(\frac{\mu + t}{\mu}\right) - t\right) - \left((n - \mu - t)\ln\left(\frac{n - \mu - t}{n - \mu}\right) + t\right) \\
&= (\mu + t)\ln\left(\frac{\mu}{\mu + t}\right) + (n - \mu - t)\ln\left(\frac{n - \mu}{n - \mu - t}\right).
\end{aligned}$$

952 Portanto, por (15),

$$\mathbb{P}(X \geq \mu + t) \leq \exp\{-\mu\varphi(t/\mu) - (n - \mu)\varphi(-t/(n - \mu))\}, \quad \forall t \in [0, n - \mu].$$

953 Tomando  $X' = n - X \sim \text{Bi}(n, p)$  e pondo  $\mu' = \mathbb{E}(X') = n - \mu$ , temos

$$\mathbb{P}(X \leq \mu - t) = \mathbb{P}(X' \geq \mu' + t) \leq \exp\{-\mu\varphi(-t/\mu) - (n - \mu)\varphi(t/(n - \mu))\}, \quad \forall t \in [0, \mu].$$

954 Assim, as primeiras desigualdades em (16) e em (17) seguem do fato de que  $\varphi(x) \geq 0$  para  
955 todo  $x$ . Não provaremos as segundas desigualdades em (16) e (17) (consulte [15, 16, 19], por  
956 exemplo). □

957 **Corolário 65.** *Seja  $X \sim \text{Bi}(n, p)$ , e  $\mu = np$ . Então,*

958 (i) *para todo  $0 \leq \varepsilon \leq 3/2$ ,  $\mathbb{P}(X \geq (1 + \varepsilon)\mu) \leq \exp\{-\frac{1}{3}\varepsilon^2\mu\}$ ; e*

959 (ii) *para todo  $\varepsilon \geq 0$ ,  $\mathbb{P}(X \leq (1 - \varepsilon)\mu) \leq \exp\{-\frac{1}{2}\varepsilon^2\mu\}$ .* □

960 Algumas referências sobre desvios são [15, 16, 19].

## 961 §11. IMERSÃO DE ÁRVORES

962 Sejam  $t, t_0, t_1, \Delta, \Delta_0$  e  $\Delta_1$  inteiros fixos. Seja  $T$  uma árvore. Se  $|V(T)| \leq t$  e  $\Delta(T) \leq \Delta$ ,  
963 dizemos que  $T$  é uma  $(t, \Delta)$ -árvore. Se é dada uma bipartição fixa  $V(T) = V_0 \cup V_1$  de  $T$  e, para  
964  $i \in \{0, 1\}$ ,  $|V_i| \leq t_i$  e  $\max\{d_T(v) : v \in V_i\} \leq \Delta_i$ , dizemos que  $T$  é uma  $(t_0, \Delta_0; t_1, \Delta_1)$ -árvore.

965 **Teorema 66** (Haxell e Kohayakawa, 1995 [?] (variante de Friedman e Pippenger, 1987 [?])).

966 *Sejam  $1 \leq \Delta_0 \leq t_1$  e  $1 \leq \Delta_1 \leq t_0$  inteiros fixos, e seja  $B = (U, W; E)$  um grafo bipartido. Se  $B$   
967 é  $(2t_1/\Delta_0, 2\Delta_0; 2t_0/\Delta_1, 2\Delta_1)$ -expansor, então  $B$  contém toda  $(t_0, \Delta_0; t_1, \Delta_1)$ -árvore.* □

968 *Aplicações do Teorema 66 (esboços):*

969 (1) Seja  $\omega = \omega(n) \rightarrow \infty$ , e  $p = p(n) = (\omega \ln n)/n$ . Então, quase todo  $G = G(n, p)$  contém  
 970 toda  $((1/8 + o(1))n, \ln n)$ -árvore.

971 *Prova.* Queremos aplicar o Teorema 66 de modo que  $B$  seja algum subgrafo bipartido  
 972 de  $G$ ,  $\Delta_0 = \Delta_1 = \ln n$  e  $t_0 = t_1 = (1/8 + o(1))n$ .

973 Notemos que, para todo  $v \in V(G)$ ,  $d_G(v) \sim pn$ . Consideremos uma partição  $\{U, W\}$   
 974 de  $V(G)$  tal que as arestas com um extremo em  $U$  e o outro em  $W$  constituem um corte  
 975 máximo. Seja  $B$  o grafo bipartido com bipartição  $V(B) = U \cup W$ . Para todo  $u \in U$ ,  
 976 temos que  $|\Gamma_B(u)| = |\Gamma_G(u) \cap W| \geq d_G(u)/2$ , e portanto  $|\Gamma_B(u)| \gtrsim pn/2$ . Logo,  $|W| \gtrsim n/2$ .  
 977 Analogamente,  $|\Gamma_B(w)| \gtrsim pn/2$  para todo  $w \in W$ , e  $|U| \gtrsim n/2$ .

978 Pelo Teorema ??, podemos e vamos supor que  $G$  é fracamente  $(p, e^{3/2}\sqrt{d})$ -bijumbled,  
 979 onde  $d = pn$ . Logo, pelo Teorema ??, para todo  $\eta > 0$  e para  $f = \min\{d, (\eta\alpha\rho e^{-3/2})^2 d\}$ ,  
 980 temos que  $B$  é  $((1 - \eta)\rho|W|/f, f, (1 - \eta)\rho|U|/f, f)$ -expansor, com  $\alpha \sim 1/2$  e  $\rho \sim 1$ .

Temos que  $f \geq 2\Delta_0 = 2\Delta_1 = 2 \ln n$ , para  $n$  suficientemente grande. E temos que

$$\begin{aligned} \frac{(1 - \eta)\rho|W|}{f} &\sim \frac{(1 - \eta)|W|}{f} \\ &\leq \frac{(1 - \eta)|W|}{2\Delta_0} \\ &\lesssim \frac{(1 - \eta)n}{4\Delta_0} \quad [\text{pois } |U| \gtrsim n/2]. \end{aligned}$$

981 Assim,  $(1 - \eta)\rho|W|/f \leq 2t_1/\Delta_0 = (1/4 + o(1))n/\Delta_0$  se tomarmos  $\eta = o(1)$ . □

982 (2) Para todo inteiro  $\Delta$ , existem  $C, c$  tais que, se  $p = p(n) = C/n$ , então  $G(n, p)$  q.c. contém  
 983 toda  $(cn, \Delta)$ -árvore.

984 *Prova.* Remova os vértices de grau pequeno e argumente como em 1. □

985 (3) [Resiliência] Denotamos por  $G \rightarrow_\beta H$  a seguinte propriedade de  $G$ : para todo subconjunto  
 986 de arestas  $F \subseteq E(G)$  com  $|F| \geq \beta|E(G)|$ ,  $G[F] \supseteq H$ .

987 Para todo inteiro  $\Delta$  e todo  $\beta$ , existem  $C, c$  tais que, se  $p = p(n) = C/n$ , então  
 988 q.c.  $G(n, p) \rightarrow_\beta T$  para toda  $(c\beta^2 n, \Delta)$ -árvore  $T$ .

989 *Prova.* Seja  $G = G(n, p)$ . Seja  $F \subseteq E(G)$  com  $|F| \geq \beta|E(G)|$ , e  $G' = G[F]$ . Remova de  
 990  $G'$  os vértices de grau  $< \beta pn/4$  e argumente como em 1. □

991 Esses resultados já são interessantes para caminhos. O *size-Ramsey number* de um grafo  $H$  é  
 992 definido por  $r_e(H) = \min\{|E(G)| : G \rightarrow (H)_2\}$ . Outras notações encontradas na literatura são  
 993  $\hat{r}(H)$  e  $\check{r}(H)$ . No final da década de 70, Erdős considerou a questão sobre determinar/estimar  
 994  $r_e(P^t)$ . É fato que  $r_e(P^t) \leq \binom{r(P^t)}{2}$ . Beck [?] provou que  $r_e(P^t) \leq 900t = O(t)$ . Mais

995 recentemente, Dudek e Prałat [?] provaram que  $r_e(P^t) \leq 137t$ , e Letzter [?] mostrou que  
 996  $r_e(P^t) \leq 91t$ . Quanto a limitantes inferiores para  $r_e(P^t)$ , Beck [?] provou que  $r_e(P^t) \geq (9/4)s$ ,  
 997 e Bollobás [?], que  $r_e(P^t) \geq (1 + \sqrt{2})s - 2$ .

998 Consideremos agora caminhos longos em  $G(n, p)$ . Dado um grafo  $G$ , um *buraco bipartido* é  
 999 um par  $(U, W)$  tal que  $U, W \subseteq V(G)$ ,  $U \cap W = \emptyset$  e não há aresta com um extremo em  $U$  e o  
 1000 outro em  $W$ . Um buraco bipartido é *balanceado* se  $|U| = |W|$ .

1001 **Lema 67** (Dudek e Prałat [?]; Pokrovskiy [?]). *O conjunto de vértices de qualquer grafo  $G$  pode*  
 1002 *ser particionado em um buraco bipartido balanceado e um caminho.*

1003 *Prova.* Consideremos pares  $(Q, (X, Y))$  tais que  $Q, X$  e  $Y$  constituem uma partição de  $V(G)$ ,  
 1004  $(X, Y)$  é um buraco bipartido e  $Q$  é um caminho em  $G - (X \cup Y)$ . Notemos que  $(\emptyset, (V(G), \emptyset))$   
 1005 é um tal par. Escolha  $(Q, (X, Y))$  tal que (1)  $\max\{|X|, |Y|\}$  é mínimo e, (2) valendo (1),  $Q$  é o  
 1006 mais curto possível. Afirmamos que tal escolha funciona, isto é,  $|X| = |Y|$ .

1007 Suponhamos o contrário. Sem perda de generalidade,  $|X| > |Y|$ . Temos que  $V(Q) \neq \emptyset$ ,  
 1008 pois, caso contrário, podemos obter outro par  $(Q', (X', Y))$  movendo algum  $x \in X$  para  $Q$ ,  
 1009 e isto contradiz a escolha de  $(Q, (X, Y))$ . Seja  $q$  uma ponta de  $Q$ . Se existe  $x \in X$  tal que  
 1010  $\{q, x\} \in E(G)$ , então obtemos outro par  $(Q', (X', Y))$  removendo  $x$  de  $X$  e o acrescentando a  $Q$ .  
 1011 Mas isto também contradiz a escolha de  $(Q, (X, Y))$ . Logo, não há aresta com extremo  $q$  e o  
 1012 outro em  $X$ . Assim, podemos obter outro par  $(Q', (X, Y'))$  removendo  $q$  de  $Q$  e o acrescentando  
 1013 a  $Y$ , uma contradição com a escolha de  $(Q, (X, Y))$ .  $\square$

1014 *Prova alternativa.* Fazemos uma busca em profundidade em  $G$  e, em cada passo dessa busca,  
 1015 é construído um par  $(Q, (X, Y))$  tal que, como na prova anterior,  $Q, X$  e  $Y$  constituem uma  
 1016 partição de  $V(G)$ ,  $(X, Y)$  é um buraco bipartido e  $Q$  é um caminho em  $G - (X \cup Y)$ .

1017 No início, antes de visitar o primeiro vértice, temos  $(\emptyset, (V(G), \emptyset))$ , e, ao final de cada passo,  
 1018  $Q$  é o conjunto de vértices na pilha,  $X$  é o conjunto de vértices explorados (ou seja, vértices  
 1019 que não estão na pilha mas já estiveram na pilha em passos anteriores) e  $Y$  é o conjunto de  
 1020 vértices não visitados (ou seja, vértices que não estão na pilha nem estiveram na pilha em passos  
 1021 anteriores). Pelas propriedades da busca em profundidade, em todo passo,  $Q, X$  e  $Y$  constituem  
 1022 uma partição de  $V(G)$ ,  $(X, Y)$  é um buraco bipartido e  $Q$  é um caminho em  $G - (X \cup Y)$ . Como  
 1023 cada vértice eventualmente é inserido na pilha e eventualmente é removido da pilha, em algum  
 1024 passo,  $|X| = |Y|$ .  $\square$

1025 Consideremos a questão sobre quantos vértices tem o maior buraco bipartido balanceado em  
 1026  $G(n, p)$ . Seja  $p = C/n$  para alguma constante  $C > 1$ , e  $t = 2C^{-1}(1 + \ln C)n$ . Seja  $X$  o número  
 1027 de buracos bipartidos balanceados  $(U, W)$  com  $|U| = |W| = t$  em  $G(n, p)$ . Temos

$$\mathbb{E}(X) \leq \binom{n}{t}^2 (1-p)^{t^2} \leq \left(\frac{en}{t} e^{-pt/2}\right)^{2t} = \left(\frac{1}{2(1+\ln C)}\right)^{2t} = o(1).$$

1028 Portanto, pelo Lema 67, vemos que q.c. o caminho mais longo em  $G(n, p)$  é maior ou igual  
 1029 a  $(1 - 4C^{-1}(1 + \ln C))n$ .

1030 **Teorema 68** (Ajtai, Komlós e Szemerédi, 1981 [?]). *Existe função  $\alpha : (1, \infty) \rightarrow (0, 1)$  com*  
 1031  *$\lim_{C \rightarrow \infty} \alpha(C) = 1$  tal que q.t.  $G(n, C/n)$  contém um caminho de comprimento  $\alpha(C)n$ .*

1032 Obs.: Relacionando o Teorema 68 com o que provamos imediatamente antes, vemos que  
 1033 mostramos a existência de uma  $\alpha : (C_0, \infty) \rightarrow (0, 1)$  ( $C_0$  deve ser tal que  $1 - 4C_0^{-1}(1 + \ln C_0) > 0$ ).

1034 **Parte 3. O MÉTODO DA REGULARIDADE**

1035 §12. DEFINIÇÕES E RESULTADOS INICIAIS

1036 Fixe <sup>17</sup> um grafo  $G = G^n$ . Para  $U, W \subset V = V(G)$ , escrevemos

$$d(U, W) := \frac{e(U, W)}{|U||W|}.$$

1037 O lema da regularidade de Szemerédi garante a existência de uma partição do grafo em um  
1038 número limitado de partes “uniformes”, que chamamos de pares  $\varepsilon$ -regulares.

1039 **Definição 69.** *Seja  $0 < \varepsilon \leq 1$ , e suponha que  $U, W \subset V$  são dois subconjuntos disjuntos e*  
1040 *não-vazios dos vértices de  $G$ . Dizemos que o par  $(U, W)$  é  $\varepsilon$ -regular se*

$$|d(U', W') - d(U, W)| \leq \varepsilon,$$

1041 *para todo  $U' \subset U$  e  $W' \subset W$  com  $|U'| \geq \varepsilon|U|$  e  $|W'| \geq \varepsilon|W|$ .*

1042 **Definição 70.** *Dados  $0 < \varepsilon \leq 1$  e  $k \geq 1$ , dizemos que uma partição  $Q = (C_i)_{0 \leq i \leq k}$  de  $V$  é*  
1043  *$(\varepsilon, k)$ -balanceada se*

1044 (1)  $|C_0| \leq \varepsilon n$ .

1045 (2)  $|C_1| = \dots = |C_k|$ .

1046 Chamamos  $C_0$  de classe excepcional de  $Q$ .

1047 **Definição 71.** *Dizemos que uma partição  $(\varepsilon, k)$ -balanceada  $Q$  de  $V$  é  $\varepsilon$ -regular se pelo menos*  
1048  *$(1 - \varepsilon) \binom{k}{2}$  dos pares  $(C_i, C_j)$  é  $\varepsilon$ -regular, onde  $1 \leq i < j \leq k$ .*

1049 O lema da regularidade de Szemerédi é como segue.

1050 **Teorema 72** (Regularidade). *Para todo  $\varepsilon > 0$  e  $k_0 \geq 1$  existem  $K_0 = K_0(\varepsilon, k_0)$  e  $N_0 = N_0(\varepsilon, k_0)$*   
1051 *tais que todo  $G = G^n$  admite uma partição  $(\varepsilon, k)$ -balanceada e  $\varepsilon$ -regular para algum  $k$  satisfazendo*  
1052  *$k_0 \leq k \leq K_0$ .*

1053 **Observação 73.** *Seja  $B = (U, W; E)$  tal que  $|U| = |W| = m$  e  $|E| = \lfloor pm^2 \rfloor$ , onde  $p$  é uma*  
1054 *constante fixa. Afirmamos que quase todo  $B$  dessa forma define um par  $\varepsilon$ -regular.*

1055 Mais precisamente, fixe  $\varepsilon > 0$  e  $p > 0$ , e defina:

1056 •  $\mathcal{B}(U, W; M) := \{B = (U, W; E) : |E| = M\}$

1057 •  $\mathcal{R}_\varepsilon(U, W; M) := \{B \in \mathcal{B}(U, W; M) : (U, W) \text{ é par } \varepsilon\text{-regular em } B\}$ .

<sup>17</sup>Notas produzidas por Bruno Pasqualotto Cavalari e Marcelo Sales

1058 Se  $M = M(m)$  é tal que  $M/m^2 \xrightarrow{m \rightarrow \infty} p$ , então

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{|R_\varepsilon(U, W; M)|}{|\mathcal{B}(U, W; M)|} = 1.$$

1059 **Observação 74** (Papel de  $k_0$ ). Primeiramente, note que toda partição  $(\varepsilon, 1)$ -balanceada é  
 1060  $\varepsilon$ -regular. No entanto, esse caso não nos dá informação sobre as arestas incidentes a  $C_0$  e arestas  
 1061 dentro de  $C_1$ . Seja  $Q$  uma partição  $(\varepsilon, k)$ -balanceada de  $G$  com  $k \geq k_0$ . Note que o número de  
 1062 arestas incidentes a  $C_0$  é no máximo  $\varepsilon n^2$ . Ademais, o número de arestas dentro das partes  $C_i$  é  
 1063 no máximo

$$\frac{1}{k} \binom{n}{2} \leq \frac{1}{k_0} \binom{n}{2}.$$

1064 Portanto, o número de arestas “indesejadas” é no máximo

$$\frac{1}{k_0} \binom{n}{2} + \varepsilon n^2.$$

1065 Tomando-se  $k_0$  grande o suficiente, e  $\varepsilon$  pequeno o suficiente, esse número pode ser suficientemente  
 1066 desprezível.

1067 Em certas aplicações é útil a seguinte variante do lema da regularidade, que dispensa a classe  
 1068 excepcional.

1069 **Teorema 75** (Variante do lema da regularidade). *Para todo  $\varepsilon > 0$  e  $k_0 \geq 1$ , existe  $K_0 = K_0(\varepsilon, k_0)$*   
 1070 *tal que todo grafo  $G = G^n$  admite uma partição  $(C_i)_{1 \leq i \leq k}$  de  $V(G)$  tal que*

1071 (1)  $k_0 \leq k \leq K_0$

1072 (2)  $\lfloor n/2 \rfloor \leq |C_1| \leq \dots \leq |C_k| \leq \lceil n/2 \rceil$

1073 (3) *Pelo menos  $(1 - \varepsilon) \binom{n}{2}$  pares  $(C_i, C_j)$  são  $\varepsilon$ -regulares.*

## 1074 §13. APLICAÇÕES

### 1075 13.1. Grafos $k$ -universais.

1076 **Definição 76.** *Seja  $G = G^n$  um grafo, e  $0 < \gamma, \delta, \sigma < 1$  números reais. Dizemos que  $G \in$*   
 1077  *$\mathcal{R}(\gamma, \delta, \sigma)$  se para todo  $S \subset V = V(G)$  tal que  $|S| \geq \gamma n$  temos  $e(S) = (\sigma + O_1(\delta)) \binom{|S|}{2}$ .*

1078 **Definição 77.** *Dizemos que  $G$  é  $k$ -universal se  $G$  contém todo grafo de ordem  $k$  como subgrafo*  
 1079 *induzido.*

1080 **Fato 78.** *Fixe  $k \geq 1$ , e sejam  $\delta, \gamma, \sigma$  números reais tais que  $0 \leq \delta \leq 1$ ,  $0 < \gamma \leq 1$  e  $0 < \sigma < 1$ .*  
 1081 *Seja  $M = M(n) = \lfloor \sigma \binom{n}{2} \rfloor$ . Então*

1082 (1) quase todo  $G(n, M)$  é  $k$ -universal.

1083 (2) quase todo  $G(n, M) \in \mathcal{R}(\gamma, \delta, \sigma)$ . □

1084 Nas próximas aulas, vamos provar o seguinte teorema.

1085 **Teorema 79.** Para todo  $k \geq 1$ ,  $0 < \sigma < 1$  e  $0 < \delta < \min\{\sigma, 1 - \sigma\}$ , existem  $\gamma > 0$  e  $n_0 \in \mathbb{N}$   
1086 tais que todo  $G = G^n \in \mathcal{R}(\gamma, \delta, \sigma)$  com  $n \geq n_0$  é  $k$ -universal.

1087 Iremos precisar do seguinte fato, e de uma versão do *lema da imersão*, que também serão  
1088 provados na próxima aula.

1089 **Fato 80.** Seja  $(U, W)$  um par  $\varepsilon$ -regular com  $d(U, W) = \varrho$ . Temos que

$$|\{u \in U : d_W(u) = (\varrho \pm \varepsilon) |W|\}| \geq (1 - 2\varepsilon) |U|,$$

1090 onde  $d_W(u) := |\Gamma(u) \cap W|$ .

1091 Para o lema da imersão, precisaremos da seguinte definição. Diremos que  $G \in \mathcal{P}(k, l, \beta, \varepsilon)$  se  
1092  $V = V(G)$  admite partição  $V = B_1 \cup \dots \cup B_k$  tal que

1093 (1)  $|B_i| = l$  para todo  $i$ ;

1094 (2) todos os pares  $(B_i, B_j)$  com  $1 \leq i < j \leq k$  são  $\varepsilon$ -regulares;

1095 (3)  $\beta < d(B_i, B_j) < 1 - \beta$ .

1096 **Lema 81** (Lema da imersão). Para todo  $0 < \beta < 1/2$  e  $k \geq 1$  existem  $\varepsilon_k = \varepsilon_k(k, \beta) > 0$  e  
1097  $l_k = l_k(k, \beta)$  tais que, se  $G \in \mathcal{P}(k, l, \beta, \varepsilon)$ , onde  $0 < \varepsilon < \varepsilon_k$  e  $l \geq l_k$ , então  $G$  é  $k$ -universal.

1098 *Demonstração do Teorema 11.* <sup>18</sup> Considere  $\delta' \in \mathbb{R}$  tal que

$$0 < \frac{1}{2} - \delta' \leq \sigma - \delta \leq \sigma + \delta \leq \frac{1}{2} + \delta'.$$

1099 Então  $[\sigma - \delta, \sigma + \delta] \subset [1/2 - \delta', 1/2 + \delta']$ . Com tal  $\delta'$ , basta considerar o caso onde  $\sigma = 1/2$ .

1100 Ponha  $\beta = 1/2 - \delta'$ . Podemos supor que  $k \geq 3/\beta$ , pois a afirmação do teorema com tal suposição

1101 implica a afirmação para valores arbitrários de  $k$ . Tome

$$\varepsilon = \left\{ \frac{1}{2R(k, k, k)}, \varepsilon_k \right\},$$

1102 onde  $\varepsilon_k = \varepsilon_k(k, \beta/2)$  é dado pelo Lema da Imersão, e  $R(k, k, k)$  é o número de Ramsey para  $K^k$   
1103 e 3 cores.<sup>19</sup> Ponha  $k_0 = 2R(k, k, k)$ , e sejam  $K_0(k_0, \varepsilon)$  e  $N_0(k_0, \varepsilon)$  as constantes fornecidas pelo

<sup>18</sup>Notas produzidas por Victor Portella e Marcelo Campos

<sup>19</sup>Isto é,  $R(k, k, k) = \{N \in \mathbb{N} : K^N \rightarrow (K^k, K^k, K^k)_3^{\text{arestas}}\}$ .

1104 Lema da Regularidade quando usado com as contantes  $k_0$  e  $\varepsilon$  que definimos. Tome

$$N_0 = \max \left\{ N_0(k_0, \varepsilon), \frac{1}{1 - \varepsilon} K_0(k_0, \varepsilon) l_k \right\},$$

1105 onde  $l_k = l_k(k, \beta/2)$  é dado pelo Lema da Imersão. Finalmente, tome

$$\gamma = \frac{(1 - \varepsilon)k}{K_0(k_0, \varepsilon)}.$$

1106 Terminamos assim de definir todas as constantes necessárias para a prova do teorema.

1107 Seja  $G = G^n \in \mathcal{R}(\gamma, \delta', 1/2)$  com  $n \geq N_0$ . Vamos provar que  $G$  é  $k$ -universal. Pelo Lema  
 1108 da Regularidade, existe partição  $\varepsilon$ -regular  $\{C_i\}_{i=1}^t$  de  $V = V(G)$  com  $k_0 \leq t \leq K_0(k_0, \varepsilon)$ .  
 1109 Seja  $l = |C_1|$  (note que  $l = |C_i|$  para todo  $i \in [t]$ ). Defina o *grafo reduzido*  $F$  sobre  $[t]$ ,  
 1110 onde  $\{i, j\} \in E(F)$  se e somente se  $(C_i, C_j)$  é  $\varepsilon$ -regular. Assim, pela definição de partição  $\varepsilon$ -  
 1111 regular, temos  $e(F) \geq (1 - \varepsilon) \binom{t}{2}$ . Como  $\varepsilon \leq \frac{1}{2R(k, k, k)}$ ,

$$\begin{aligned} e(F) &\geq \left(1 - \frac{1}{2R(k, k, k)}\right) \binom{t}{2} \geq \left(\frac{2R(k, k, k) - 1}{2R(k, k, k)}\right) \frac{t^2}{2} \\ &> \left(\frac{2R(k, k, k) - 2}{2R(k, k, k)}\right) \frac{t^2}{2} = \left(1 - \frac{1}{R(k, k, k)}\right) \frac{t^2}{2} \\ &> \left(1 - \frac{1}{R(k, k, k) - 1}\right) \frac{t^2}{2}. \end{aligned}$$

1112 Assim, como  $t \geq 2R(k, k, k)$ , pelo Teorema de Turán temos que  $K^R \subset F$ , onde  $R = R(k, k, k)$ .

1113 Sem perda de generalidade, suponha  $F[\{1, \dots, R\}] \cong K^R$ . Defina a coloração  $\text{cor}: \binom{[R]}{2} \rightarrow$   
 1114  $\{1, 2, 3\}$  pela seguinte regra para todos  $i, j \in [R]$  distintos:

- 1115 •  $\text{cor}(\{i, j\}) = 1$  se  $d(C_i, C_j) < \beta/2$ ,
- 1116 •  $\text{cor}(\{i, j\}) = 2$  se  $\beta/2 \leq d(C_i, C_j) \leq 1 - \beta/2$ ,
- 1117 •  $\text{cor}(\{i, j\}) = 3$  se  $d(C_i, C_j) > 1 - \beta/2$ .

1118 Pela definição de  $R(k, k, k)$ , existe  $K^k \subset F[\{1, \dots, R\}]$  monocromático. Sem perda de genera-  
 1119 lidade, suponha que  $F[\{1, \dots, k\}]$  é monocromático de cor  $\alpha \in \{1, 2, 3\}$ . Vamos agora provar  
 1120 que

$$\alpha = 2. \tag{18}$$

1121 Ponha  $S = C_1 \cup \dots \cup C_k$ . Usando as propriedades da partição  $\{C_i\}_{i=1}^t$  dada pelo Lema da  
 1122 Regularidade,

$$|S| = \sum_{i=1}^k |C_i| = k \frac{(1 - \varepsilon)n}{t} \geq k \frac{(1 - \varepsilon)n}{K_0(k_0, \varepsilon)} = \gamma n.$$

1123 Portanto, como  $G \in \mathcal{R}(\gamma, \delta', 1/2)$ ,

$$d(S) \in [\beta, 1 - \beta/2]. \quad (19)$$

1124 Suponha que  $\alpha = 1$ . Como já vimos, o número de arestas de  $G[S]$  com ambas pontas em  
 1125 algum  $C_i$  (com  $i \in [k]$ ) é no máximo  $\frac{1}{k} \binom{|S|}{2}$ . Portanto,

$$\begin{aligned} d(S) &= \frac{e(S)}{\binom{|S|}{2}} = \frac{1}{\binom{|S|}{2}} \left( \sum_{i=1}^k e(C_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq k} e(C_i, C_j) \right) \\ &= \frac{1}{\binom{|S|}{2}} \left( \sum_{i=1}^k \binom{|C_i|}{2} d(C_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq k} |C_i| |C_j| d(C_i, C_j) \right) \\ &< \frac{1}{\binom{|S|}{2}} \left( \sum_{i=1}^k \binom{|C_i|}{2} + \sum_{1 \leq i < j \leq k} |C_i| |C_j| \frac{\beta}{2} \right) \\ &\leq \frac{1}{k} + \frac{\beta}{2} \leq \frac{\beta}{3} + \frac{\beta}{2} = \frac{5\beta}{6} < \beta, \end{aligned}$$

1126 o que contradiz (19). Suponha agora que  $\alpha = 3$ . De forma semelhante, temos que

$$\begin{aligned} d(S) &= \frac{e(S)}{\binom{|S|}{2}} = \frac{1}{\binom{|S|}{2}} \left( \sum_{i=1}^k e(C_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq k} e(C_i, C_j) \right) \\ &\geq \frac{1}{\binom{|S|}{2}} \sum_{1 \leq i < j \leq k} |C_i| |C_j| d(C_i, C_j) \\ &> \frac{1 - \beta/2}{\binom{|S|}{2}} \sum_{1 \leq i < j \leq k} |C_i| |C_j| = \frac{1 - \beta/2}{\binom{|S|}{2}} \binom{k}{2} \left( \frac{|S|}{k} \right)^2 \\ &\geq \left( 1 - \frac{\beta}{2} \right) \left( 1 - \frac{1}{k} \right) \geq \left( 1 - \frac{\beta}{2} \right) \left( 1 - \frac{\beta}{3} \right) \\ &= 1 - \frac{5\beta}{6} + \frac{\beta^2}{6} \geq 1 - \frac{5\beta}{6} > 1 - \beta, \end{aligned}$$

1127 o que contradiz (19). Isso termina a prova de (18).

1128 Como  $\alpha = 2$ , podemos aplicar o Lema da Imersão em  $G[C_1 \cup \dots \cup C_k]$ , concluindo que  $G$   
 1129 é  $k$ -universal. □

1130 Enunciaremos agora, sem prova, duas outras aplicações ilustrativas do método da regularidade.

1131 O primeiro é uma generalização do Teorema de Turán, resultado conhecido como Teorema de  
 1132 Erdős-Stone.

1133 **Teorema 82** ([11]). *Para todo grafo  $H$  e para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que, para todo*  
 1134 *grafo  $G = G^n$  com  $n \geq n_0$ , vale que se*

$$e(G) \geq \left( 1 - \frac{1}{\chi(H) - 1} + \varepsilon \right) \binom{n}{2},$$

1135 então  $H$  é um subgrafo de  $G$ .

1136 A segunda aplicação é conhecido por Teorema de Ramsey Induzido. Sejam dados grafos  $G$   
1137 e  $H_1, \dots, H_r$ . Escrevemos  $G \xrightarrow{\text{ind}}(H_1, \dots, H_r)$  se vale o seguinte: para qualquer coloração das  
1138 arestas de  $G$  com cores  $1, \dots, r$ , para algum  $1 \leq i \leq r$ , um subgrafo induzido  $H$  de  $G$  isomorfo  
1139 a  $H_i$  tem todas suas arestas coloridas com a cor  $i$ . Isto é, existe  $U \subset V(G)$  tal que o subgrafo  $H =$   
1140  $G[U] = (U, \binom{U}{2} \cap E(G))$  induzido por  $U$  em  $G$  é isomorfo a  $H_i$  e todas as arestas em  $\binom{U}{2} \cap E(G)$   
1141 estão coloridas com a cor  $i$ .

1142 **Teorema 83** ([5, 7, 22]). *Para toda escolha de grafos  $H_1, \dots, H_r$ , existe um grafo  $G$  tal que*

$$G \xrightarrow{\text{ind}}(H_1, \dots, H_r).$$

1145 Iremos<sup>20</sup> aqui discutir duas aplicações de análise harmônica em combinatória. Para isto,  
 1146 vamos primeiro recapitular as ferramentas que serão usadas. Seja  $G$  um grupo abeliano finito.  
 1147 Temos que  $G$  é isomórfico à soma direta de diversos grupos cíclicos, ou seja, existem  $k$  e  $n_i$ , com  
 1148  $i \in \{1, \dots, k\}$  e  $n_i \geq 2$  para todo  $i$ , tais que

$$G \cong \bigoplus_{i=1}^k \mathbb{Z}_{n_i} \quad (20)$$

1149 Esta caracterização dos grupos abelianos finitos nos permite simplificar nossa análise, focando  
 1150 em grupos cíclicos. Neste contexto, podemos definir os *caracteres* do grupo como

$$\chi_a(x) = e \left( \sum_{i=1}^k \frac{a_i x_i}{n_i} \right). \quad (21)$$

1151 Os caracteres tem uma estrutura de grupo quando vistos como elementos de  $\mathbb{C}^G$ ; Note que  $\mathbb{C}^G$   
 1152 tem uma estrutura de álgebra, por ser o conjunto de funções cuja imagem é um corpo. Iremos  
 1153 olhar para o grupo multiplicativo desta álgebra. A relação deste grupo com o grupo original é  
 1154 descrita por

1155 **Teorema 84.** *Seja  $G$  um grupo abeliano finito, e  $\hat{G}$  o grupo dos caracteres de  $G$ , definidos como*  
 1156 *na equação 21. Vale que*

1157 (1)  $|G| = |\hat{G}|$ ,

1158 (2) A função  $(a \mapsto \chi_a)$  é um isomorfismo de grupos,

1159 (3) O conjunto  $\{\chi_a : a \in G\}$  é uma base ortonormal de  $\mathbb{C}^G$ .

1160 É natural encarar a transformada de Fourier como uma mudança de base em  $\mathbb{C}^G$ . Em particular,  
 1161 temos que para qualquer  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ ,

$$f = \sum_{x \in G} f(x) \cdot \delta_x, \quad (22)$$

1162 onde  $\delta_x(i) = 1$  se e somente se  $i = x$ . Queremos encontrar coeficientes  $\alpha_\xi^{(f)}$ , ou, equivalentemente  
 1163  $\alpha_a^{(f)}$ , tais que

$$f = \sum_{\xi \in \hat{G}} \alpha_\xi^{(f)} \cdot \xi = \sum_{a \in G} \alpha_a^{(f)} \cdot \chi_a. \quad (23)$$

---

<sup>20</sup>Notas produzidas por ... ???

1164 Para tal, iremos utilizar o fato de que estamos lidando com um espaço euclidiano. De acordo  
 1165 com Teorema 84 (3), temos uma base ortonormal, então os coeficientes são dados pelo produto  
 1166 interno do espaço. Mais concretamente,

1167 **Definição 85.** *Seja  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ . Definimos  $\hat{f}: G \rightarrow \mathbb{C}$  por*

$$\hat{f} := (a \mapsto \langle f, \chi_a \rangle) = \mathbb{E}_{x \in G}[f(x) \overline{\chi_a(x)}].$$

1168 Temos então a transformada.

1169 **Teorema 86** (Transformada de Fourier). *Seja  $G$  um grupo abeliano finito. Seja  $f \in \mathbb{C}^G$ . Então*

$$f = \sum_{a \in G} \hat{f}(a) \cdot \chi_a.$$

1170 Os próximos dois resultados mostram como a transformada se comporta bem com a estrutura  
 1171 Euclidiana. Primeiro, temos que a transformada “quase preserva produto interno”. Formalmente,

1172 **Teorema 87** (Teorema de Plancherel). *Seja  $G$  um grupo abeliano finito. Sejam  $f, g \in \mathbb{C}^G$ .*

1173 *Então*

$$\langle f, g \rangle = \sum_{a \in G} \hat{f}(a) \cdot \overline{\hat{g}(a)}.$$

1174 **Teorema 88** (Teorema de Parseval). *Seja  $G$  um grupo abeliano finito. Seja  $f \in \mathbb{C}^G$ . Então*

$$\|f\|^2 = \sum_{a \in G} |\hat{f}(a)|^2.$$

## 1175 §15. TESTE DE LINEARIDADE

1176 Os resultados aqui apresentados são consequência do trabalho de Blum, Luby e Rubinfeld  
 1177 (1993) e Bellare, Coppersmith, Hastad, Kiwi e Sudan (1996).

1178 **Definição 89.** *Seja  $f: \mathbb{Z}_2^n \rightarrow \mathbb{Z}_2$  uma função booleana. Ela é dita linear se para todo  $\{x, y\} \in$   
 1179  $\binom{\mathbb{Z}_2^n}{2}$  vale que*

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

1180 *O conjunto de todas as funções lineares é denotado  $\mathcal{L}$ .*

1181 Como mencionado, as ferramentas desenvolvidas de análise harmônica exploram a estrutura  
 1182 de espaço Euclidiano. Assim, é interessante expressar as quantias relevantes como distâncias e  
 1183 produtos internos. Nesse sentido, se  $f, g \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_2^n}$ , note que

$$\begin{aligned}
\|f - g\|^2 &= \langle f - g, f - g \rangle = \mathbb{E}_{x \in \mathbb{Z}_2^n} \left[ (f(x) - g(x)) \overline{(f(x) - g(x))} \right] \\
&= \frac{1}{2^n} \sum_{x \in \mathbb{Z}_2^n} |f(x) - g(x)|^2 \\
&= \frac{1}{2^n} \sum_{x \in \mathbb{Z}_2^n} \mathbb{1}[f(x) \neq g(x)] = \mathbb{P}_{x \in_u \mathbb{Z}_2^n} (f(x) \neq g(x)).
\end{aligned}$$

1184 Denotamos então  $d(f, g) = \|f - g\|^2$ . Naturalmente, para qualquer subconjunto  $S \subseteq \mathbb{Z}_2^n$ ,  
1185 definimos  $d(f, S) = \min_{g \in S} d(f, g)$ . Em especial,

$$d(f, \mathcal{L}) = \min_{g \in \mathcal{L}} d(f, g)$$

1186 é a distância para a função linear mais próxima de  $f$ , e é zero se e somente se  $f$  é linear.

1187 Iremos então supor que  $f$  é dada por um oráculo, e queremos minimizar a quantidade de  
1188 chamadas do oráculo. Formalmente, vamos procurar um algoritmo  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\varepsilon, \delta}$  tal que

- 1189 (1) Se  $f \in \mathcal{L}$ , então  $\mathcal{A}(f) = 1$ .  
1190 (2) Se  $d(f, \mathcal{L}) \geq \varepsilon$ , então  $\mathbb{P}(\mathcal{A}(f) = 0) \geq 1 - \delta$ .  
1191 (3)  $\mathcal{A}$  deve fazer um número de consultas que seja  $O_{\varepsilon, \delta}(1)$ .

1192 Iremos supor que  $\mathcal{A}$  tem acesso a elementos uniformemente escolhidos de  $\mathbb{Z}_2^n$ .

1193 **function** TESTALINEARIDADE( $f, \delta, \varepsilon$ )

1194     Seja  $N = N(\delta, \varepsilon) = \left\lceil \frac{\ln(1/\delta)}{\ln(1/(1-\varepsilon))} \right\rceil$ .

1195     **while**  $N > 0$  **do**

1196          $N \leftarrow N - 1$ .

1197         Sorteia  $x \in_u \mathbb{Z}_2^n$ .

1198         Sorteia  $y \in_u \mathbb{Z}_2^n$ .

1199         **if**  $f(x + y) \neq f(x) + f(y)$  **then**

1200             **return**  $f$  não é linear.

1201         **end if**

1202     **end while**

1203     **return**  $f$  é linear.

1204 **end function**

1205 Note que claramente valem (1) e (3) dos requisitos do algoritmo. Resta demonstrar (2).

1206 *Demonstração.* Suponha que  $f: \mathbb{Z}_2^n \rightarrow \mathbb{Z}_2$  tal que  $d(f, \mathcal{L}) \geq \varepsilon$ . Definimos

$$q := \mathbb{P}_{x,y \in \mathbb{Z}_2^n} (f(x+y) = f(x) + f(y)).$$

1207 Como  $f$  está distante de  $\mathcal{L}$ , queremos demonstrar que  $q^N$ , a probabilidade de o algoritmo apenas  
1208 testar pares tais que  $f(x+y) = f(x) + f(y)$  é pequena. Em símbolos, temos que

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}(f) = 1) = q^N.$$

1209 Começamos com uma mudança de variável. Seja  $F(x) = (-1)^{f(x)}$ . Note que  $F$  é um caractere  
1210 se e somente se, para todo par  $x, y \in \mathbb{Z}_2^n$ , vale que  $F(x+y) = F(x) \cdot F(y)$ . Logo, se  $F$  é um  
1211 caractere, temos que

$$(-1)^{f(x+y)} = F(x+y) = F(x) \cdot F(y) = (-1)^{f(x)+f(y)}.$$

1212 Por outro lado, se  $f$  é linear, segue que

$$F(x+y) = (-1)^{f(x+y)} = (-1)^{f(x)+f(y)} = F(x) \cdot F(y).$$

1213 Vale então que  $F$  é um caractere se e somente se  $f$  é linear. Ademais, vale que  $d(f, \mathcal{L}) = d(F, \widehat{\mathbb{Z}}_2^n)$ .

1214 Tome então um  $a \in \mathbb{Z}_2^n$  qualquer. Por hipótese, vale que  $d = d(f, \chi_a) \geq \varepsilon$ . Observe que, da  
1215 definição de distância, em  $d$  representa a proporção dos casos nos quais  $F(x) \neq \chi_a(x)$ . Nestes, o  
1216 produto é negativo. Nos demais, é positivo. Assim,

$$\widehat{F}(a) = \langle F, \chi_a \rangle = \mathbb{E}_{x \in \mathbb{Z}_2^n} [F(x) \overline{\chi_a(x)}] = (-1) \cdot d + (1-d) \cdot 1 = 1 - 2d \leq 1 - 2\varepsilon.$$

1217 O mesmo argumento aplicado à definição de  $q$  garante que, para  $x, y$  sorteados de maneira  
1218 independente e uniforme em  $\mathbb{Z}_2^n$ , temos que  $q$  é a proporção dos casos nos quais  $F(x+y) =$   
1219  $F(x) \cdot F(y)$ . Portanto,

$$\mathbb{E}_{x,y \in \mathbb{Z}_2^n} [F(x+y)F(x)F(y)] = q \cdot 1 + (1-q) \cdot (-1) = 2q - 1.$$

1220 Usando Fourier, a linearidade da esperança, e a independência entre  $x$  e  $y$ , temos então

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{x,y}(F(x+y)F(x)F(y)) &= \mathbb{E}_{x,y} \left( \left( \sum_{a \in G} \hat{F}(a) \chi_a(x+y) \right) \left( \sum_{b \in G} \hat{F}(b) \chi_b(x) \right) \left( \sum_{c \in G} \hat{F}(c) \chi_c(y) \right) \right) \\
&= \mathbb{E}_{x,y} \left( \left( \sum_{a \in G} \hat{F}(a) \chi_a(x) \chi_a(y) \right) \left( \sum_{b \in G} \hat{F}(b) \chi_b(x) \right) \left( \sum_{c \in G} \hat{F}(c) \chi_c(y) \right) \right) \\
&= \sum_{a \in \mathbb{Z}_2^n} \sum_{b \in \mathbb{Z}_2^n} \sum_{c \in \mathbb{Z}_2^n} \hat{F}(a) \hat{F}(b) \hat{F}(c) \mathbb{E}_x(\chi_a(x) \chi_b(x)) \mathbb{E}_y(\chi_a(y) \chi_c(y)) \\
&= \sum_{a \in \mathbb{Z}_2^n} \hat{F}(a) \left( \sum_{b \in \mathbb{Z}_2^n} \hat{F}(b) \mathbb{E}_x(\chi_a(x) \chi_b(x)) \right) \left( \sum_{c \in \mathbb{Z}_2^n} \hat{F}(c) \mathbb{E}_y(\chi_a(y) \chi_c(y)) \right) \\
&= \sum_{a \in \mathbb{Z}_2^n} \hat{F}(a)^2 \left( \sum_{b \in \mathbb{Z}_2^n} \hat{F}(b) \mathbb{E}_x(\chi_a(x) \chi_b(x)) \right) = \sum_{a \in \mathbb{Z}_2^n} \hat{F}(a)^3.
\end{aligned}$$

1221

□

1222 Como o valor de  $\hat{F}(a) \in \{-1, 1\}$  para todo  $a \in \mathbb{Z}_2^n$ , temos que  $\hat{F}(a)^2 \geq 0$ , e, portanto

$$\begin{aligned}
2q - 1 &= \mathbb{E}_{x,y}[F(x+y)F(x)F(y)] \\
&= \sum_{a \in \mathbb{Z}_2^n} \hat{F}(a)^3 \\
&\leq \sum_{a \in \mathbb{Z}_2^n} (1 - 2\varepsilon) \hat{F}(a)^2 \\
&= (1 - 2\varepsilon) \|F\|^2 = 1 - 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

1223 Segue então que  $q \leq 1 - \varepsilon$ . Assim,

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}(f) = 1) = q^N \leq (1 - \varepsilon)^N \leq \delta,$$

1224 da escolha do valor de  $N$ .

- 1227 [1] N. Alon, L. Babai, and H. Suzuki, *Multilinear polynomials and frankl-ray-chaudhuri-wilson type intersection*  
1228 *theorems*, Journal of Combinatorial Theory, Series A **58** (1991), no. 2, 165–180. [↑4.1](#)
- 1229 [2] B. Bollobás, *On generalized graphs*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **16** (1965), 447–452. [MR0183653](#) [↑7](#)
- 1230 [3] H. T. Croft, *On 6-point configurations in 3-space*, J. London Math. Soc. **36** (1961), 289–306. [MR0126745](#)  
1231 [↑10.1](#)
- 1232 [4] L. Danzer and B. Grünbaum, *über zwei Probleme bezüglich konvexer Körper von P. Erdős und von V. L.*  
1233 *Klee*, Math. Z. **79** (1962), 95–99. [MR0138040](#) [↑10.1](#)
- 1234 [5] W. Deuber, *Generalizations of Ramsey's theorem* (1975), 323–332. Colloq. Math. Soc. János Bolyai, Vol. 10.  
1235 [MR0369127](#) [↑83](#)
- 1236 [6] M. Deza, P. Frankl, and N. M. Singhi, *On functions of strength  $t$* , Combinatorica **3** (1983), no. 3-4, 331–339.  
1237 [MR729786](#) [↑23](#)
- 1238 [7] P. Erdős, A. Hajnal, and L. Pósa, *Strong embeddings of graphs into colored graphs* (1975), 585–595. Colloq.  
1239 Math. Soc. János Bolyai, Vol. 10. [MR0382049](#) [↑83](#)
- 1240 [8] P. Erdős and Z. Füredi, *The greatest angle among  $n$  points in the  $d$ -dimensional Euclidean space*, Combinatorial  
1241 mathematics (Marseille-Luminy, 1981), 1983, pp. 275–283. [MR841305](#) [↑61](#)
- 1242 [9] P. Erdős, *Some unsolved problems*, Michigan Math. J. **4** (1957), 291–300. [MR0098702](#) [↑10.1](#)
- 1243 [10] P. Erdős, *Some remarks on the theory of graphs*, Bull. Amer. Math. Soc. **53** (1947), 292–294. [MR0019911](#) [↑47](#)
- 1244 [11] P. Erdős and A. H. Stone, *On the structure of linear graphs*, Bull. Amer. Math. Soc. **52** (1946), 1087–1091.  
1245 [MR0018807](#) [↑82](#)
- 1246 [12] P. Frankl and R. M. Wilson, *Intersection theorems with geometric consequences*, Combinatorica **1** (1981),  
1247 no. 4, 357–368. [MR84g:05085](#) [↑20](#), [22](#)
- 1248 [13] V. Harangi, *Acute sets in Euclidean spaces*, SIAM J. Discrete Math. **25** (2011), no. 3, 1212–1229. [MR2837593](#)  
1249 [↑10.1](#)
- 1250 [14] F. Jaeger and C. Payan, *Nombre maximal d'arêtes d'un hypergraphe  $\tau$ -critique de rang  $h$* , C. R. Acad. Sci.  
1251 Paris Sér. A-B **273** (1971), A221–A223. [MR0505817](#) [↑1.2](#)
- 1252 [15] S. Janson, *On concentration of probability*, Contemporary combinatorics, 2002, pp. 289–301. [MR1919574](#)  
1253 [↑10.2.1](#), [10.2.1](#)
- 1254 [16] S. Janson, T. Łuczak, and A. Ruciński, *Random graphs*, Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics  
1255 and Optimization, Wiley-Interscience, New York, 2000. [MR1782847](#) [↑10.2.1](#), [10.2.1](#)
- 1256 [17] G. O. H. Katona, *Solution of a problem of A. Ehrenfeucht and J. Mycielski*, J. Combinatorial Theory Ser. A  
1257 **17** (1974), 265–266. [MR0344130](#) [↑1.2](#)
- 1258 [18] D. Lubell, *A short proof of Sperner's lemma*, J. Combinatorial Theory **1** (1966), 299. [MR0194348](#) [↑1.1](#)
- 1259 [19] C. McDiarmid, *Concentration*, Probabilistic methods for algorithmic discrete mathematics, 1998, pp. 195–248.  
1260 [MR1678578](#) [↑10.2.1](#), [10.2.1](#)
- 1261 [20] F. P. Ramsey, *On a Problem of Formal Logic*, Proc. London Math. Soc. **S2-30** (1930), 264–286. [MR1576401](#)  
1262 [↑46](#)

- 1263 [21] D. K. Ray-Chaudhuri and R. M. Wilson, *On  $t$ -designs*, Osaka J. Math. **12** (1975), no. 3, 737–744. [MR0392624](#)  
1264       ↑[19](#)
- 1265 [22] V. Rödl, *A generalization of ramsey theorem*, Graphs, Hypergraphs and Block Systems (eds. M. Borowiecki,  
1266       Z. Skupien and L. Szamkolowicz), Zielona Gora (1976), 211–220. ↑[83](#)
- 1267       INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA, UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO, RUA DO MATÃO 1010, 05508–  
1268       090 SÃO PAULO, SP