

Árvores geradoras mínimas

Árvores geradoras mínimas

1. Grafos com pesos nas arestas: $G = (V, E)$, $c: E \rightarrow \mathbb{R}$ (usualmente, $c(e) \geq 0$ para toda $e \in E$)

Árvores geradoras mínimas

1. Grafos com pesos nas arestas: $G = (V, E)$, $c: E \rightarrow \mathbb{R}$ (usualmente, $c(e) \geq 0$ para toda $e \in E$)
2. Neste capítulo: G será sempre conexo.

Árvores geradoras mínimas

1. Grafos com pesos nas arestas: $G = (V, E)$, $c: E \rightarrow \mathbb{R}$ (usualmente, $c(e) \geq 0$ para toda $e \in E$)
2. Neste capítulo: G será sempre conexo.
3. Queremos: *Árvore geradora* T de G com $c(E(T))$ mínimo (MST: 'minimum spanning tree')

Algoritmos

Algoritmos

- ▶ Algoritmo de Prim

Algoritmos

- ▶ Algoritmo de Prim
- ▶ Algoritmo de Kruskal

Algoritmos

- ▷ Algoritmo de Prim
- ▷ Algoritmo de Kruskal
- ▷ Algoritmo de Boruvka

Antes dos algoritmos...

Antes dos algoritmos...

Seja $G = (V, E)$ um grafo. Um *corte (de arestas)* de G é um conjunto da forma

$$E(S, V \setminus S) = \left\{ \{s, t\} \in E : s \in S, t \in V \setminus S \right\}.$$

Antes dos algoritmos...

Seja $G = (V, E)$ um grafo. Um *corte (de arestas)* de G é um conjunto da forma

$$E(S, V \setminus S) = \{ \{s, t\} \in E : s \in S, t \in V \setminus S \}.$$

Às vezes, $(S, V \setminus S)$ é chamado de 'corte'.

Antes dos algoritmos...

Seja $G = (V, E)$ um grafo. Um *corte (de arestas)* de G é um conjunto da forma

$$E(S, V \setminus S) = \{ \{s, t\} \in E : s \in S, t \in V \setminus S \}.$$

Às vezes, $(S, V \setminus S)$ é chamado de 'corte'.

Seja T uma AG de G . Para cada $e \in E(G) \setminus E(T)$, definimos o *circuito fundamental de e em relação a T* como sendo o único circuito em $T + e$.

(Notação: $C(e, T)$)

Antes dos algoritmos...

Antes dos algoritmos...

- Propriedade 1 (Propriedade 20.1, Prop. dos Cortes).** (i) *Qualquer aresta $e \in E(S, V \setminus S)$ de peso mínimo pertence a alguma AGM de G .*
- (ii) *Qualquer AGM de G contém uma aresta $e \in E(S, V \setminus S)$ de peso mínimo.*

Definições para AGM-GENERIC(G, c)

Definições para AGM-GENERIC(G, c)

- ▷ Suponha que A está contida em uma AGM de (G, c) . Uma aresta $e \in E(G) \setminus A$ é *boa para* A se $A \cup \{e\}$ também está contida em uma AGM de G .

Definições para AGM-GENERICO(G, c)

- ▷ Suponha que A está contida em uma AGM de (G, c) . Uma aresta $e \in E(G) \setminus A$ é *boa para* A se $A \cup \{e\}$ também está contida em uma AGM de G .
- ▷ $(S, V \setminus S)$ *respeita* $A \subset E(G)$ se $A \cap E(S, V \setminus S) = \emptyset$.

Definições para AGM-GENERIC(G, c)

- ▷ Suponha que A está contida em uma AGM de (G, c) . Uma aresta $e \in E(G) \setminus A$ é *boa para* A se $A \cup \{e\}$ também está contida em uma AGM de G .
- ▷ $(S, V \setminus S)$ *respeita* $A \subset E(G)$ se $A \cap E(S, V \setminus S) = \emptyset$.

Propriedade 2. $G = (V, E)$ grafo conexo, $c: E \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subset E$ contida em alguma AGM de (G, c) . Seja $(S, V \setminus S)$ um corte que respeita A . Se e tem peso mínimo dentre todas as arestas em $E(S, V \setminus S)$, então e é boa para A .

AGM-GENERIC(G, c)

AGM-GENERICO(G, c)

1. $A \leftarrow \emptyset$
2. **enquanto** A não gera uma AG
3. **faça** encontre uma boa aresta $e = \{u, w\}$ para A
4. $A \leftarrow A \cup \{e\}$
5. **devolva** A

Prim e Kruskal

Prim e Kruskal

- ▶ Prim e Kruskal são casos particulares de $\text{AGM-GENERIC}(G, c)$.

Prim e Kruskal

- ▶ Prim e Kruskal são casos particulares de $\text{AGM-GENERIC}(G, c)$.

Correção decorre da Proposição 2.

Algoritmo de Prim

Algoritmo de Prim

Crescemos uma árvore T até que ela se torne geradora. Começamos com uma árvore com um único vértice e , genericamente, pomos $S = V(T)$ na Propriedade 2. Escolhemos e no AGM-GENÉRICO(G, c) como dado pela Propriedade 2.

Algoritmo de Prim, estrutura de dados

Algoritmo de Prim, estrutura de dados

Mantemos

1. para cada vértice na árvore: pai (st [])

Algoritmo de Prim, estrutura de dados

Mantemos

1. para cada vértice na árvore: pai (`st []`)
2. para cada vértice fora da árvore: o vértice mais próximo da árvore (`fr []`)

Algoritmo de Prim, estrutura de dados

Mantemos

1. para cada vértice na árvore: pai (`st []`)
2. para cada vértice fora da árvore: o vértice mais próximo da árvore (`fr []`)
3. para cada vértice na árvore: comprimento da aresta ao pai (`wt []`)

Algoritmo de Prim, estrutura de dados

Mantemos

1. para cada vértice na árvore: pai ($st []$)
2. para cada vértice fora da árvore: o vértice mais próximo da árvore ($fr []$)
3. para cada vértice na árvore: comprimento da aresta ao pai ($wt []$)
4. para cada vértice fora da árvore: o comprimento ao vértice mais próximo da árvore ($wt []$)

Programa 20.3, Algoritmo de Prim (grafos densos)

```
static int fr[maxV];
#define P G->adj[v][w]
void GRAPHmstV(Graph G, int st[], double wt[])
{ int v, w, min;
  for (v = 0; v < G->V; v++) {st[v] = -1; fr[v] = v; wt[v] = maxWT;}
  st[0] = 0; wt[G->V] = maxWT;
  for (min = 0; min != G->V; ) {
    v = min; st[min] = fr[min];
    for (w = 0, min = G->V; w < G->V; w++)
      if (st[w] == -1) {
        if (P < wt[w]) { wt[w] = P; fr[w] = v; }
        if (wt[w] < wt[min]) min = w;
      }
  }
}
```

Programa 20.3, Algoritmo de Prim (grafos densos), cont.

Programa 20.3, Algoritmo de Prim (grafos densos), cont.

Propriedade 3. *O Programa 20.3 tem complexidade $O(n^2)$.*

Programa 20.3, Algoritmo de Prim (grafos densos), cont.

Propriedade 3. *O Programa 20.3 tem complexidade $O(n^2)$.*

Demonstração. Por inspeção.



Programa 20.3, Algoritmo de Prim (grafos densos), cont.

Propriedade 3. *O Programa 20.3 tem complexidade $O(n^2)$.*

Demonstração. Por inspeção.



Conclusão: Programa 20.3 é bom para grafos densos.

Algoritmo de Prim, grafos esparsos

Algoritmo de Prim, grafos esparsos

Usamos o esquema de busca generalizada em grafos.

Algoritmo de Prim, grafos esparsos

Usamos o esquema de busca generalizada em grafos. Programa 18.10:

```
void pfs(Graph G, Edge e)
{ link t; int v, w;
  GQput(e); pre[e.w] = cnt++;
  while (!GQempty()) {
    e = GQget(); w = e.w; st[w] = e.v;
    for (t = G->adj[w]; t != NULL; t = t->next)
      if (pre[v = t->v] == -1) {GQput(EDGE(w, v)); pre[v] = cnt++;}
      else if (st[v] == -1) GQupdate(EDGE(w, v));
  }
}
```

Programa 20.4, Algoritmo de Prim (grafos esparsos)

Programa 20.4, Algoritmo de Prim (grafos esparsos)

```
static int fr[maxV];
static double *priority;
int less(int i, int j)
    { return priority[i] < priority[j]; }
#define P wt[t->v]
```

Programa 20.4, Algoritmo de Prim (grafos esparsos)

```
void GRAPHmst(Graph G, int st[], double wt[])
{ link t; int v, w;
  PQinit(); priority = wt;
  for (v = 0; v < G->V; v++) { st[v] = -1; fr[v] = -1; }
  fr[0] = 0; PQinsert(0);
  while (!PQempty()) {
    v = PQdelmin(); st[v] = fr[v];
    for (t = G->adj[v]; t != NULL; t = t->next)
      if (fr[w = t->v] == -1)
        { wt[w] = P; PQinsert(w); fr[w] = v; }
      else if ((st[w] == -1) && (P < wt[w]))
        { wt[w] = P; PQdec(w); fr[w] = v; }
  }
}
```

Programa 20.3, Algoritmo de Prim (grafos esparsos), cont.

Programa 20.3, Algoritmo de Prim (grafos esparsos), cont.

Propriedade 4. *O Programa 20.4, com a fila de prioridade implementada com um heap (binário), tem complexidade $O((n + m) \log n) = O(m \log n)$.*

Programa 20.3, Algoritmo de Prim (grafos esparsos), cont.

Propriedade 4. *O Programa 20.4, com a fila de prioridade implementada com um heap (binário), tem complexidade $O((n + m) \log n) = O(m \log n)$.*

Demonstração. Por inspeção.



Programa 20.3, Algoritmo de Prim (grafos esparsos), cont.

Propriedade 4. *O Programa 20.4, com a fila de prioridade implementada com um heap (binário), tem complexidade $O((n + m) \log n) = O(m \log n)$.*

Demonstração. Por inspeção.



Conclusão: Programa 20.4 é bom para grafos esparsos.