# EXERCÍCIOS DE MATEMÁTICA DISCRETA 2o. SEMESTRE DE 2002

1. [Erdős] Sejam $x_1, \ldots, x_n$ números reais. Considere as $2^n$ somas da forma
$$x_{i_1} + \cdots + x_{i_k},$$
onde $i_1 < \cdots < i_k$ e $k \geq 0$. Digamos que um conjunto $S$ dessas somas seja *pequeno* se quaisquer dois membros de $S$ distem $< 1$ (a diferença é menor que 1). Determine o tamanho máximo de um conjunto pequeno supondo que os $x_i$ sejam todos tais que $|x_i| \geq 1$. Isto é, determine $f(n)$ para todo $n \geq 0$, onde definimos $f(n)$ como sendo
$$\max_{x_1,\ldots,x_n} \max\{|S| \colon S \text{ é pequeno}\}$$
e o (primeiro) máximo é tomado sobre todas as seqüências $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ com $|x_i| \geq 1$ para todo $i$. {*Data de entrega*: 22/8/2002}
2. ($^+$) [Kleitman] Seja $B$ um espaço normado. (Se você não está familiarizado com espaços normados, suponha que $B$ é o $\mathbb{R}^d$ para algum $d$.) Determine $f(n)$ para todo $n \geq 0$, onde definimos $f(n)$ como sendo
$$\max_{x_1,\ldots,x_n} \max\{|S| \colon S \text{ é pequeno}\}$$
e o (primeiro) máximo é tomado sobre todas as seqüências $x_1, \ldots, x_n \in B$ com $||x_i|| \geq 1$ para todo $i$ (isto é, todos os $x_i$ têm norma pelo menos 1).

   Naturalmente, este problema se reduz ao Ex. 1 se $B$ é $\mathbb{R}$.
3. [Erdős–Szekeres] Prove que toda seqüência $a_0, \ldots, a_{n^2}$ contém uma subseqüência monótona com $n+1$ elementos, isto é, uma subseqüência não-crescente ou uma subseqüência não-decrescente com $n+1$ elementos. Mais precisamente, prove que existem $0 \leq i_0 < \cdots < i_n \leq n^2$ com $a_{i_0} \leq \cdots \leq a_{i_n}$ ou com $a_{i_0} > \cdots > a_{i_n}$. {*Data de entrega*: 27/8/2002}
4. Seja $P$ uma ordem parcial infinita que não contenha uma anticadeia com mais de $m$ elementos ($m \in \mathbb{N}$). Deduza da versão finita do teorema de Dilworth que $P$ pode ser coberta por uma família de $m$ cadeias. [*Sugestão.* Considere o espaço topológico compacto $[m]^P$ das funções de $P$ em $[m] = \{1, \ldots, m\}$. Caso você não tenha familiaridade com topologia (elementar), dê uma demonstração "puramente combinatória" para o caso em que $P$ é enumerável.]
5. Fixe um inteiro positivo $n$ e considere a ordem parcial $P_n = ([n], \preceq)$ sobre $[n]$ com $x \preceq y$ se e só se $x$ divide $y$. Encontre uma anticadeia $A$

*Date*: Versão de 11 de dezembro de 2002.

em $P_n$ e uma partição em cadeias $\mathcal{C}$ de $P_n$ com $|A| = |\mathcal{C}|$. Deduza que $A$ é máximo e $|\mathcal{C}|$ é mínimo e assim determine o valor de $\alpha(P_n) = \beta(P_n)$. $\{$*Data de entrega*: 29/8/2002$\}$

6. [Kövári, Sós, e Turán]
   ($i$) Seja $G = G^n$ um grafo $r$-regular (todos os vértices têm grau $r$), com $r \geq cn$ para alguma constante $c > 0$. Conte o número de cópias do grafo $K^2(1, s)$ em $G$ e, usando que
   $$n\binom{r}{s} \geq s\binom{n}{s} \text{ para } n \geq n_0(s, c), \tag{1}$$
   deduza que se $n$ é suficientemente grande, então $G$ contém $K^2(s, s)$. (Não deixe de provar (1).)

   ($ii$) Use as idéias em ($i$) e a desigualdade
   $$\frac{1}{n}\sum_{x\in V(G)}\binom{d(x)}{s} \geq \binom{n^{-1}\sum_{x\in V(G)} d(x)}{s} \tag{2}$$
   para provar que $\mathrm{ex}(n, H) = o(n^2)$ (isto é, $\lim_{n\to\infty} \mathrm{ex}(n, H)/n^2 = 0$) para todo grafo bipartido $H$. (Você sabe provar (2)?)

   ($iii$) Conclua que $\mathrm{ex}(n, H) = o(n^2)$ se e só se $H$ é bipartido.

   $\{$*Data de entrega*: 10/9/2002$\}$

7. Seja $G$ um grafo infinito. A *densidade superior* $\bar{\sigma}(G)$ de $G$ é definida como sendo
   $$\limsup_{n\to\infty} \sigma_n(G), \tag{3}$$
   onde
   $$\sigma_n(G) = \sup\{\sigma(G[W])\colon W \subset V(G),\ |W| = n\}, \tag{4}$$
   e $\sigma(G[W])$ denota a densidade $e(G[W])\binom{|W|}{2}^{-1}$ do grafo $G[W] = (W, E(G) \cap \binom{W}{2})$ induzido por $W$ em $G$. Deduza do teorema de Erdős e Stone que as únicas densidades superiores possíveis são
   $$0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots, 1.$$
   Isto é
   $$\{\bar{\sigma}(G)\colon G \text{ grafo infinito}\} = \left\{1 - \frac{1}{t}\colon t \in \mathbb{N}\right\} \cup \{1\}.$$

8. [Erdős] Seja $f^{(d)}(n)$ o número máximo de vezes que a distância 1 ocorre em uma configuração de $n$ pontos em $\mathbb{R}^d$. Mostre que $f^{(2)}(n) = O(n^{3/2})$. [*Sugestão.* Prove que $\mathrm{ex}(n, K^{(2)}(2, 3)) = O(n^{3/2})$ usando o método do Ex. 6 e use este resultado ($K^{(2)}(2, 3)$ é o grafo bipartido completo com classes de vértices de cardinalidades 2 e 3).] $\{$*Data de entrega*: 12/9/2002$\}$

9. ($^+$) (Continuação do Ex. 8) Mostre que $f^{(2)}(n)$ é superlinear, isto é,
   $$\lim_{n\to\infty} f^{(2)}(n)/n = \infty.$$

10. Seja $\mathcal{H} \subset \binom{[n]}{k}$ um hipergrafo $k$-uniforme. Para $\mathbf{x} = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$, seja

$$\lambda_{\mathcal{H}}(\mathbf{x}) = \sum_{H \in \mathcal{H}} \prod_{i \in H} x_i. \tag{5}$$

Em palavras, para cada hiperaresta $H$ de $\mathcal{H}$, consideramos o monômio $\prod_{i \in H} x_i$, e consideramos a soma de todos estes monômios. Pomos

$$\Delta = \Big\{ \mathbf{x} = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n : \\ \sum\nolimits_{1 \leq i \leq n} x_i = 1 \text{ e } x_i \geq 0 \text{ para todo } i \Big\} \tag{6}$$

e

$$\lambda^*(\mathcal{H}) = \sup\{\lambda_{\mathcal{H}}(\mathbf{x}) \colon \mathbf{x} \in \Delta\}. \tag{7}$$

Para $\mathbf{x} = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$, seja

$$\mathrm{supp}(\mathbf{x}) = \{i \in [n] \colon x_i \neq 0\}. \tag{8}$$

Segue da compacidade de $\Delta$ que $\lambda^*(\mathcal{H}) = \lambda_{\mathcal{H}}(\mathbf{x}^*)$ para algum $\mathbf{x}^* = (x_i^*)_{1 \leq i \leq n} \in \Delta$. Podemos, ademais, escolher $\mathbf{x}^*$ de forma que a cardinalidade de $\mathrm{supp}(\mathbf{x}^*)$ seja a menor possível.

- [Frankl e Rödl] Prove que para todo $i$ e $j \in \mathrm{supp}(\mathbf{x}^*)$, existe $H \in \mathcal{H}$ tal que $\{i, j\} \subset H \subset \mathrm{supp}(\mathbf{x}^*)$.

11. [Motzkin e Straus] (Continuação do Ex. 10)
   ($i$) Mostre que $\lambda^*(\mathcal{H}) \geq |\mathcal{H}|/n^k$.
   ($ii$) Suponha agora que $k = 2$, isto é, estamos falando de grafos. Seja $\omega(H)$ o número máximo de vértices mutuamente adjacentes em $H$, isto é, $\omega(H) = \max\{k \colon\ H \text{ contém } K^k\}$. Mostre que

$$\lambda^*(H) \leq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\omega}\right). \tag{9}$$

   ($iii$) Deduza o seguinte corolário do teorema de Turán: para todo $t \geq 1$, temos

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{ex}(n, K^{t+1}) \binom{n}{2}^{-1} = 1 - \frac{1}{t}. \tag{10}$$

{*Data de entrega*: 17/9/02}

12. Para inteiros $t \leq n$, ponha

$$g(n, t) = \max |\mathcal{F}| \tag{11}$$

onde o máximo é tomado sobre todos os $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}([n]) = 2^{[n]}$ que são $t$-*intersectantes*, isto é, para todo $F$ e $F' \in \mathcal{F}$, temos $|F \cap F'| \geq t$. (Note que, aqui, não estamos considerando $r$-grafos para algum $r$ fixo, mas sistemas de conjuntos sem restrição de cardinalidade para seus membros).
   ($i$) Mostre que $g(n, 1) = 2^{n-1}$.

(*ii*) Mostre que, para todo inteiro $t \geq 2$, temos $g(n,t) = (1+o(1))2^{n-1}$. Isto é, prove que $\lim_{n\to\infty} g(n,t)2^{-n+1} = 1$. [*Sugestão.* Use a fórmula de Stirling

$$n! = (1+o(1))\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \tag{12}$$

para provar que

$$\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor + k} = (1+o(1))2^n\sqrt{\frac{2}{\pi n}} = o(2^n), \tag{13}$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$ fixo. Deduza que

$$\sum_{k\geq(n+t)/2}\binom{n}{k} = (1+o(1))2^{n-1},$$

e use esse fato.]

{*Data de entrega*: 19/9/2002}

13. Provamos que, para todo primo $p$, temos que o número cromático do $\mathbb{R}^n$ satisfaz

$$c(4p-1) \geq \binom{4p-1}{2p-1}\left(\sum_{0\leq j<p}\binom{4p-1}{j}\right)^{-1}. \tag{14}$$

(*i*) Prove que

$$\sum_{0\leq j<p}\binom{4p-1}{j} \leq \left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\dots\right)\binom{4p-1}{p-1} \leq \frac{3}{2}\binom{4p-1}{p-1}.$$

(*ii*) Use a fórmula de Stirling (12) para deduzir que

$$\binom{n}{\alpha n} = \left(\frac{1}{\alpha^\alpha(1-\alpha)^{1-\alpha}}\right)^{(1+o(1))n},$$

ou, equivalentemente,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\binom{n}{\alpha n} = H(\alpha),$$

onde $H(\alpha) = \alpha\log(1/\alpha)+(1-\alpha)\log(1/(1-\alpha))$ é a assim chamada função entropia.

(*iii*) Prove que o lado direito de (14) é pelo menos $(1.139)^{4p-1}$ se $p$ é suficientemente grande.

{*Data de entrega*: 24/9/2002}

14. O Exercício 13 mostra que $c(4p-1) \geq (1.139)^{4p-1}$ para todo primo $p$ suficientemente grande. Seja $\pi(x)$ o número de números primos $p \leq x$. O bem conhecido teorema dos números primos diz que

$$\lim_{x\to\infty}\pi(x)\frac{\log x}{x} = 1.$$

Use esse resultado para provar que $c(n) \geq (1.13)^n$ para todo $n$ suficientemente grande.

15. Seja $p$ um primo. Construa um conjunto $X$ de $\binom{4p}{2p}$ pontos em $\mathbb{R}^{4p-1}$ com a seguinte propriedade: *todo $X' \subset X$ que não contém dois elementos ortogonais é tal que*

$$|X'| \leq 2 \sum_{0 \leq j < p} \binom{4p}{j}.$$

[*Sugestão.* Considere vetores com coordenadas $\pm 1$ em $\mathbb{R}^{4p}$ com o mesmo número de $+1$s e $-1$s.] Use esse conjunto $X$ para construir conjuntos $Y \subset \mathbb{R}^d$ que desprovam a conjectura de Borsuk, onde $d = \binom{4p-1}{2}$. [*Sugestão.* Considere a aplicação

$$g\colon (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq 4p-1} \mapsto (a_{ij})_{1 \leq i < j \leq 4p-1},$$

que leva matrizes $(4p-1) \times (4p-1)$ em matrizes triangulares superiores.] {*Data de entrega*: 26/9/2002}

16. [Problema de Witsenhausen; Frankl e Wilson] Seja $S^d \subset \mathbb{R}^{d+1}$ a esfera unitária em $\mathbb{R}^{d+1}$:

$$S^d = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{d+1} : \|\mathbf{x}\| = 1\}.$$

Pomos

$$\mu(d) = \sup_E \frac{\mu_d(E)}{\mu_d(S^d)}, \tag{15}$$

onde o supremo é tomado sobre todos os conjuntos (mensuráveis) $E \subset S^d$ que não contêm dois vetores ortogonais, e $\mu$ denota a medida de Lebesgue $d$-dimensional. Mostre que $\mu(d) \leq (1-\varepsilon)^d$ para alguma constante absoluta $\varepsilon > 0$. [*Observação.* A única dificuldade desse exercício está na teoria da medida envolvida, pois tudo se resume em uma aplicação do teorema de Fubini. Aqueles que não têm familiaridade suficiente com a teoria da medida podem dar um "argumento informal" para provar esse resultado.]

17. [Frankl e Wilson]

   ($i$) Seja $\mathcal{A} \subset \binom{[n]}{k}$ um sistema de $k$-conjuntos e $L$ um conjunto de $s$ inteiros. Suponha que, para todo $A$ e $A' \in \mathcal{A}$ distintos, temos $|A \cap A'| \in L$. Prove que

$$|\mathcal{A}| \leq \sum_{0 \leq j \leq s} \binom{n}{j}. \tag{16}$$

   ($ii$) Sejam $p$ um primo e $n$ um inteiro positivo, e considere o grafo completo $K$ com conjunto de vértices

$$V = \binom{[n]}{p^2-1}. \tag{17}$$

   Pinte a aresta $\{A, B\}$ de $K$ de azul se

$$|A \cap B| \equiv -1 \pmod{p} \tag{18}$$

e de vermelho caso contrário. Seja $\alpha(n,p)$ o número máximo de vértices em um subgrafo completo vermelho em $K$, e seja $\omega(n,p)$ o número máximo de vértices em um subgrafo completo azul em $K$. Prove que se $p-1 \leq (n+1)/3$, então

$$\alpha(n,p),\ \omega(n,p) < 2\binom{n}{p-1}. \tag{19}$$

{*Data de entrega*: 3/10/2002}

18. (Continuação do Ex. 17) Use o teorema dos números primos (veja Ex. 14) e umas estimativas simples para coeficientes binomiais para mostrar que, escolhendo $n = p^3$, a coloração definida acima prova (construtivamente!) o seguinte: *para todo* $\varepsilon > 0$, *se* $t \geq t_0(\varepsilon)$, *o número de Ramsey* $R(t)$ *satisfaz*

$$R(t) \geq \exp\left\{\left(\frac{1}{4} - \varepsilon\right)\frac{(\log t)^2}{\log\log t}\right\}. \tag{20}$$

A cota inferior para $R(t)$ em (20) é a melhor que se sabe provar de forma construtiva.

19. Fixe um inteiro positivo $n$. Nesta questão, escrevemos $\{x < y\}$ para um par de inteiros $\{x, y\}$ com $x < y$. Considere o grafo $\Gamma = \Gamma_n$ cujos vértices são os pares $\{x, y\} \subset [n]$ e cujas arestas são todos os pares de vértices da forma

$$\big\{\{x < y\}, \{y < z\}\big\}.$$

($\Gamma = \Gamma_n$ tem $\binom{n}{2}$ vértices e $\binom{n}{3}$ arestas.) Observe que $\Gamma$ não tem triângulos. Mostre que, dado qualquer inteiro $k$, existe $n_0$ tal que se $n \geq n_0$, então o número cromático de $\Gamma = \Gamma_n$ é pelo menos $k$. {*Data de entrega*: 15/10/2002}

20. [de Bruijn e Erdős] Seja $G = (V, E)$ um grafo e $k$ um inteiro. Suponha que $\chi(G) \geq k$. Prove que $G$ contém um subgrafo *finito* $H$ com $\chi(H) \geq k$. Equivalentemente, mostre que existe $W \subset V$ *finito* com o grafo $G[W]$ induzido por $W$ em $G$ tal que $\chi(G[W]) \geq k$. O grafo $G[W]$ tem, por definição, conjunto de vértices $W$ e conjunto de arestas

$$\binom{W}{2} \cap E.$$

21. [Erdős e Hajnal] Fixe um inteiro $d$ e um real $\varepsilon > 0$. O grafo de Borsuk $B(d, \varepsilon)$ tem como conjunto de vértices

$$S^d = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{d+1} : \|\mathbf{x}\| = 1\}$$

e $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \subset S^d$ é uma aresta de $B(d, \varepsilon)$ se

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \geq 2 - \varepsilon.$$

Prove que para todo $k$ e $\ell$ inteiros, existem $d$ e $\varepsilon > 0$ tais que $B(d, \varepsilon)$ tem número cromático $\geq k$ e cintura ímpar $\geq 2\ell + 1$. A *cintura* *ímpar* $\mathrm{og}(G)$ de um grafo $G$ é o comprimento mínimo de um circuito de comprimento ímpar em $G$:

$$\begin{aligned}\mathrm{og}(G) = \min\{2r+1\colon \exists x_0,\dots,x_{2r}\in V(G) \text{ distintos}\\ \text{com } \{x_{i-1},x_i\}\in E(G) \text{ para todo } i \text{ (índices mod } 2r+1)\}\end{aligned}$$

[*Sugestão.* Use o teorema de Borsuk: *se cobrimos a esfera $S^d$ com $d+1$ fechados (respectivamente, abertos), sempre há um par de pontos antípodas em um dos fechados (respectivamente, abertos).*]

Deduza do Ex. 20 que $B(d,\varepsilon)$ (com $d$ e $\varepsilon$ apropriados) contém subgrafos finitos $G$ com $\chi(G)\geq k$ e $\mathrm{og}(G)\geq 2\ell+1$.

22. (Continuação do Ex. 21) Nesta questão, dizemos que um grafo $G$ tem a propriedade $P(c)$ se todo subgrafo $H$ de $G$ é tal que $\alpha(H)\geq c|V(H)|$.
    - $(i)$ Mostre que se $G$ é tal que $\chi(G)=k$, então $G$ tem a propriedade $P(1/k)$.
    - $(ii)$ Mostre que se $G$ tem a propriedade $P(1/2)$, então $\chi(G)\leq 2$.
    - $(iii)$ Mostre que para todo inteiro $k$ e $0<c<1/2$, existe um grafo $G$ que tem a propriedade $P(c)$ mas $\chi(G)\geq k$. [*Sugestão.* Mostre que $B(d,\varepsilon)$ com $d$ e $\varepsilon$ apropriados é um tal grafo.]
23. Suponha que
$$p = p(n) = \frac{\log n + f}{n}, \tag{21}$$
onde $f=f(n)$, e considere o grafo aleatório $G(n,p)$. Prove que as seguintes asserções valem para quase todo $G=G(n,p)$.
    - $(i)$ Se $f=f(n)\to\infty$, então $G$ não tem vértices isolados.
    - $(ii)$ Se $f=f(n)\to-\infty$ e $|f|\leq\log n$, então $G$ tem vértices isolados. De fato, o número de vértices isolados $X=X(G)$ em $G$ satisfaz
    $$X\sim\exp\{-f\}.$$
    - $(iii)$ O que você consegue dizer sobre o caso em que $f=f(n)\to f_0$ para alguma contante $f_0$?

    {*Data de entrega*: 17/10/2002}
24. Considere $[n]=\{1,\dots,n\}$ e suponha que sorteamos um subconjunto aleatório $R$ de $[n]$ colocando $x\in[n]$ em $R$ com probabilidade $p$, independentemente para cada $x$. Considere a propriedade $\mathrm{PA}_k$ de $R$ conter uma progressão aritmética de $k$ elementos, onde $k\geq 3$ é um inteiro fixo, independente de $n$. Mostre que $p^*=p^*(n)=n^{-2/k}$ é uma função limiar para a propriedade $\mathrm{PA}_k$. {*Data de entrega*: 22/10/2002}.
25. Considere a identidade
$$\sum_{0\leq k\leq n}\binom{n}{k} = 2^n, \tag{22}$$
e seja $\omega=\omega(n)$ uma função com $\omega\to\infty$ conforme $n\to\infty$. Podemos dizer que a soma em (22) está 'concentrada' nos termos com $k$

satisfazendo

$$\left|k - \frac{n}{2}\right| \leq \omega\sqrt{n}, \tag{23}$$

pois

$$\sum\nolimits_k^* \binom{n}{k} \sim 2^n, \tag{24}$$

onde $\sum_k^*$ indica soma sobre todos os $k$ satisfazendo (23) e escrevemos $f(n) \sim g(n)$ se $\lim_n f(n)/g(n) = 1$.

Suponha agora que $\varepsilon > 0$ é um número real fixo. Podemos dizer que a soma em (22) está 'exponencialmente concentrada' nos termos com $k$ satisfazendo

$$\left|k - \frac{n}{2}\right| \leq \varepsilon n, \tag{25}$$

pois

$$\sum\nolimits_k' \binom{n}{k} \leq 2^n \exp\{-c_\varepsilon n\}, \tag{26}$$

onde $\sum_k'$ indica soma sobre todos os $k$ para os quais (25) *não vale*, $c_\varepsilon > 0$ é uma constante que depende apenas de $\varepsilon$, e supomos $n \geq n_0(\varepsilon)$.

$(i)$ Prove (24).

$(ii)$ Prove que a condição de que $\omega \to \infty$ é necessária para que (24) valha. Para tanto, use a fórmula de Stirling (12). De fato, use (12) para provar que se $k = k(n) = n/2 + c_n\sqrt{n}$, onde $c_n \to c$ $(n \to \infty)$ e $c$ é uma constante, então

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \sim \frac{d}{\sqrt{n}} 2^n, \tag{27}$$

onde $d = d(c) > 0$ é uma constante que depende apenas de $c$.

$(iii)$ Prove (26). Qual é o maior valor de $c_\varepsilon$ com o qual você consegue provar (26)?

[*Sugestão.* Considere um variável aleatória binomial $X$ de parâmetros $n$ e $1/2$, de forma que $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k}2^{-n}$. Para $(i)$, aplique a desigualdade de Chebyshev. Para $(iii)$, use uma desigualdade para grandes desvios.] {*Data de entrega*: 24/10/2002}

26. Prove as seguintes estimativas. Nesta questão, escrevemos $O(f(x))$ para qualquer termo $y$ tal que $|y| \leq C|f(x)|$ para todo $x$ satisfazendo $|x| \leq x_0$, onde $C$ e $x_0 > 0$ são constantes absolutas. (Observe que, nestas estimativas, estamos intessados em uma vizinhança de 0.)

$(i)$ $1 + x \leq \mathrm{e}^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

$(ii)$ $1 + x > \exp\left\{x - x^2/2\right\}$ para todo $0 < x \leq 1$.

$(iii)$ $1 - x > \exp\left\{-x - x^2\right\}$ para todo $0 < x < x_0$, para algum $x_0 > 0$. De fato, podemos tomar, por exemplo, $x_0 = 0.68$.

$(iv)$ Prove que $1 + x \geq \exp\{x/(1+x)\}$ para todo $x > -1$. (Este item substituiu dois itens que constavam nesta lista anteriormente.)

[*Sugestão.* Lembre que $1/(1-x) = 1 + x + x^2 + \dots$ uniformemente se $|x| \le x_0$ e $x_0 < 1$. Integre ambos os lados para obter

$$-\log(1-x) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots]$$

27. Prove as seguintes estimativas para $\binom{a}{b}$, onde $a$ e $b$ são inteiros não-negativos.

   (*i*) Se $a \ge b$, então

$$\binom{a}{b} \ge \left(\frac{a}{b}\right)^b. \tag{28}$$

   (*ii*)

$$\binom{a}{b} \le \frac{a^b}{b!}. \tag{29}$$

   (*iii*) Para todo $b > 0$,

$$\binom{a}{b} \le \left(\frac{\mathrm{e}a}{b}\right)^b. \tag{30}$$

   [*Sugestão para* (*iii*). Avalie $(1+x)^a$ por cima e por baixo para $x = b/a$. Use, para tanto, $1 + x \le \mathrm{e}^x$ e o binômio de Newton: $(1+x)^a \ge \binom{a}{b}x^b$.]

28. [Shamir–Spencer] Considere o grafo aleatório $G = G(n, 1/2)$, ou, equivalentemente, seja $G$ um grafo escolhido uniformemente ao acaso dentre todos os grafos com $n$ vértices fixos, digamos $[n]$. Defina

$$A_i = \big\{\{i,j\} \colon i < j \le n\big\} \tag{31}$$

e

$$\Gamma_i = 2^{A_i} = \mathcal{P}(A_i) \tag{32}$$

para todo $1 \le i < n$. Note que os $A_i$ $(1 \le i < n)$ particionam $\binom{[n]}{2}$. Assim, podemos identificar $G$ com um vetor $(X_1, \dots, X_{n-1})$, onde $X_i \in \Gamma_i$ para todo $i$. Note que os $X_i$ $(1 \le i < n)$ são independentes. Como de usual, seja $\chi(G)$ o número cromático de $G$.

   (*i*) Prove que $\chi \colon \prod_{1 \le i < n} \Gamma_i \to \mathbb{R}$ é 1-Lipschitz; note que isso equivale a dizer que para quaisquer dois grafos $G$ e $G'$ com conjunto de vértices $[n]$, se $E(G) \triangle E(G') = (E(G) \cup E(G')) \setminus (E(G) \cap E(G')) \subset A_i$ para algum $i$, então $|\chi(G) - \chi(G')| \le 1$.

   (*ii*) Seja $\lambda = \lambda(n)$ uma função arbitrária com $\lambda \to \infty$. Mostre que $\chi(G)$ está concentrada em uma faixa de largura $2\lambda\sqrt{n}$ em torno de $\mathbb{E}(\chi)$, isto é, mostre que a probabilidade de termos

$$|\chi(G) - \mathbb{E}(\chi)| \le \lambda\sqrt{n}$$

   é $1 - o(1)$.

   (*iii*) Como de usual, seja $\omega(G)$ o número de clique de $G$, isto é, $\omega(G)$ é a cardinalidade máxima de um conjunto de vértices mutuamente adjacentes em $G$. Mostre que $\omega(G) < 2\log_2 n$ com probabilidade $1 - o(1)$, e conclua que $\chi(G) > n/2\log_2 n$ com probabilidade $1 - o(1)$. [*Sugestão.* Estime o valor esperado do número de $U \subset [n]$, $|U| = \lceil 2\log_2 n \rceil$, com $\binom{U}{2} \subset E(G)$ (isto é, $U$ induz um clique). Para tanto, use Ex. 27($iii$).]

($iv$) Observe que segue de ($ii$) e ($iii$) que $\chi(G) \sim \mathbb{E}(\chi)$ com probabilidade $1 - o(1)$.

{*Data de entrega*: 31/10/2002}

29. Chamemos uma cópia de $K^3$ (um triângulo) em um grafo $G$ de *isolado* se ele não tem aresta comum com nenhum outro triângulo. Seja $Y$ o número conjuntos $U \in \binom{[n]}{3}$ que induzem um triângulo isolado no grafo aleatório $G(n,p)$. Mostre que $\mathbb{E}(Y) \geq (1/6 - o(1))n^3p^3$ se $p = \lambda n^{-2/3}$ com $\lambda = \lambda(n) \to \infty$, mas, digamos, $\lambda \ll n^{1/6}$. [*Sugestão.* Seja $X$ o número de $U \in \binom{[n]}{3}$ que induzem um triângulo em $G(n,p)$ e seja $Z$ o número de $W \in \binom{[n]}{4}$ que induzem pelo menos 5 arestas. Note que $Y \geq X - 4Z$.][1]

30. Considere o grafo aleatório $G(n,p)$ com $p = \lambda n^{-2/3}$, com $\lambda = \lambda(n) \to \infty$ e $\lambda \ll n^{1/6}$, e sejam $X$ e $Y$ como no Ex. 29. Prove que

$$\mathbb{P}(X = 0) \leq \mathbb{P}(Y = 0) \leq \exp\left\{-c\lambda^6\right\} \tag{33}$$

para uma constante $c > 0$. [*Sugestão.* Observe que $Y$ é 1-Lipschitz.] **Observação.** Infelizmente, a sugestão não está correta (você vê o motivo?). Chamemos uma família de triângulos de *independente* se quaisquer dois triângulos nesta família não têm aresta comum. Seja $Y'$ a cardinalidade máxima de uma família independente de triângulos. *Mostre que $Y'$ é 1-Lipschitz.* Use esse fato para provar que

$$\mathbb{P}(X = 0) \leq \exp\left\{-c\lambda^6\right\} \tag{34}$$

para alguma constante $c > 0$. {*Data de entrega*: 5/11/2002}

31. [Łuczak] (Continuação do Ex. 30) A cota superior para $\mathbb{P}(X = 0)$ do Ex. 30 pode ser melhorada para

$$\mathbb{P}(X = 0) \leq \exp\left\{-cn^3p^3\right\} \tag{35}$$

para alguma constante $c > 0$, desde que, digamos, $p \ll 1/\sqrt{n}$. Eis um roteiro da prova[2]: inicialmente, fixe uma coloração $\gamma\colon \binom{[n]}{2} \to [f]$ de $\binom{[n]}{2}$ com $f$ cores, onde $f \sim Cn^3p^3$ e $C$ é uma constante convenientemente grande, e $|\gamma^{-1}(i)| \leq n^2/f$ para todo $i$ (isto é, cada cor é usada no máximo $n^2/f$ vezes).

Defina uma cópia $H$ de $K^3$ em $G(n,p)$ como *$\gamma$-isolada* se as cores que ocorrem nas três arestas de $H$ não ocorrem em nenhuma outra cópia $H'$ de $K^3$ em $G(n,p)$ com $E(H') \cap E(H) = \emptyset$. Seja $Y_\gamma$ o número de cópias isoladas de $K^3$ em $G(n,p)$.

[1] Os enunciados dos Ex. 29–32 ainda podem sofrer certa revisão.

[2] Eu ficaria contente se alguém pudesse verificar este roteiro.

(*i*) Prove que

$$\mathbb{E}(Y_\gamma) \geq c_1 n^3 p^3 \tag{36}$$

para alguma constante $c_1 > 0$ desde que $C$ seja suficientemente grande. [*Sugestão.* Sejam $X$ e $Z$ como no Ex. 29. Como $\mathbb{E}(Z) \ll \mathbb{E}(X)$, podemos ignorar cópias de $K^3$ que não são isoladas (no sentido do Ex. 29). Seja agora $Z_\gamma$ o número de pares $(H, H')$ de cópias de $K^3$ em $G(n,p)$, com $E(H) \cap E(H') = \emptyset$ e com alguma aresta em $H$ e alguma aresta em $H'$ da mesma cor (isto é, ambos $H$ e $H'$ encontram um mesmo $\gamma^{-1}(i)$ para algum $i$). Você pode estimar $\mathbb{E}(Z_\gamma)$ por

$$O\left(f\binom{n^2/f}{2}n^2p^4\right) = O\left(n^3p^3/C\right).$$

Conclua (36).]

(*ii*) Ponha agora $\Gamma_i = 2^{\gamma^{-1}(i)} = \mathcal{P}(\gamma^{-1}(i))$ $(1 \leq i \leq f)$. Observe que $G(n,p)$ pode ser identificado com um vetor $(X_1, \dots, X_f)$ com os $X_i \in \Gamma_i$ para todo $i$ e com os $X_i$ independentes. Prove que $Y_\gamma$ é 1-Lipschitz, no sentido que se temos dois grafos $G$ e $G'$ com $E(G) \triangle E(G') = (E(G) \cup E(G')) \setminus (E(G) \cap E(G')) \subset \gamma^{-1}(i)$ para algum $i$, então $|Y_\gamma(G) - Y_\gamma(G')| \leq 1$.

(*iii*) Conclua (35).

32. Dado um grafo $G$, seja $\chi_3(G)$ o número mínimo de partes em que podemos particionar o conjunto de vértices de $G$ de forma que cada uma das partes não induza triângulos. Equivalentemente, $\chi_3(G) = k$ se podemos colorir os vértices de $G$ com $k$ cores de forma que nenhum triângulo fique monocromático (tenha seus 3 vértices da mesma cor), mas $k-1$ cores não bastam.[3] Prove que, para todo inteiro $k$, existe um grafo $G$ que não contém $K^4$, mas temos $\chi_3(G) \geq k$. [*Sugestão.* Considere $G(n,p)$ com $p = \lambda n^{-2/3}$ com $\lambda = \lambda(n)$ apropriado. Use (35) para mostrar que, com probabilidade $1 - o(1)$, conjuntos que não induzem $K^3$ em $G(n,p)$ são de cardinalidade $o(n)$. Altere $G(n,p)$ de forma apropriada para obter $G$ como no enunciado.] {*Data de entrega*: 5/11/2002}

33. Seja $G = G^n$ um grafo com $n$ vértices e grau máximo

$$\Delta = \Delta(G) = \max\{\deg(x) \colon x \in V(G)\}.$$

Seja $m = |E(G)|$ o número de arestas em $G$. Seja $0 < p = p(n) < 1$ e suponha que escolhemos um conjunto aleatório $W \subset V(G)$ pondo $\mathbb{P}(x \in W) = p$, independetemente para todo $x \in V(G)$. Seja $Y$ o número de arestas induzidas por $W$, isto é,

$$Y = \left| E(G) \cap \binom{W}{2} \right|.$$

Ponha $\mu = \mathbb{E}(Y)$.

[3] Definindo $\chi_2(G)$ de forma análoga, $\chi_2(G) = \chi(G)$, o número cromático usual de $G$.

($i$) Observe que $\mu = p^2 m$. Observe também que $Y$ é $\Delta$-Lipschitz, isto é, se $W \triangle W' = (W \setminus W') \cup (W' \setminus W)$ é unitário, então $|Y(W) - Y(W')| \leq \Delta$.

($ii$) Deduza que, para todo $t \geq 0$, temos

$$\mathbb{P}(|Y - \mu| \geq t) \leq 2 \exp\{-t^2/2\Delta^2 n\}. \tag{37}$$

($iii$) Prove que, para alguma constante universal $c > 0$,

$$\mathbb{P}(|Y - \mu| \geq t) \leq 4 \exp\{-ct^2/\Delta^2(\mu + t)\} \tag{38}$$

para todo $t \geq 0$. [*Sugestão.* Note que, para todo inteiro $r \geq 1$, a desigualdade $Y \geq r$ pode ser justificada por um certificado de "tamanho" no máximo $2r\Delta^2$; isto é, tome $\psi(r) = 2r\Delta^2$.]

($iv$) Suponha agora que $G$ é $d$-regular, isto é, todos os seus vértices têm grau $d$. Deduza de (37) e (38) que se

$$p \gg \min\{n^{-1/4}, \sqrt{d/n}\},$$

então $Y \sim \mu$ com probabilidade $1 - o(1)$; isto é, para alguma função $g(n) \to 0$, temos

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|Y/\mu - 1| \leq g(n)) = 1.$$

{*Data de entrega*: 19/11/2002}

34. [Janson] Este exercício ilustra uma forma alternativa de se provar o resultado no Ex. 31.

($i$) Prove (35) usando a desigualdade de Janson. Mais explicitamente, mostre que existe uma constante absoluta $c > 0$ tal que se $p \ll 1/\sqrt{n}$, então (35) vale.

($ii$) Suponha agora que $p \gg 1/\sqrt{n}$. Mostre que a desigualdade (35) não vale. Mostre, entretanto, que

$$\mathbb{P}(X = 0) \leq \exp\{-cpn^2\}$$

para alguma constante $c > 0$. Prove ainda que

$$\mathbb{P}(X = 0) \geq \exp\{-c' pn^2\}$$

para alguma constante $c' > 0$.

{*Data de entrega*: 19/11/2002}

35. [Kleitman] Suponha que $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$, e $\mathcal{I}$ são sistemas de conjuntos sobre o conjunto $X = [n]$, isto é, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$, e $\mathcal{I} \subset 2^X = \mathcal{P}(X)$. Suponha ainda que $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ são "fechados por se tomar subconjuntos" e $\mathcal{H}$ e $\mathcal{I}$ são "fechado por se tomar superconjuntos". Isto é, se $F \subset F' \in \mathcal{F}$, então $F \in \mathcal{F}$ e analogamente para $\mathcal{G}$; enquanto que se $H \subset H'$ e $H \in \mathcal{H}$, então $H' \in \mathcal{H}$ e analogamente para $\mathcal{I}$. Prove que

$$|\mathcal{F} \cap \mathcal{G}| \geq 2^{-n} |\mathcal{F}||\mathcal{G}|, \tag{39}$$

$$|\mathcal{H} \cap \mathcal{I}| \geq 2^{-n} |\mathcal{H}||\mathcal{I}|, \tag{40}$$

e

$$|\mathcal{F} \cap \mathcal{H}| \leq 2^{-n}|\mathcal{F}||\mathcal{H}|. \tag{41}$$

[*Sugestão.* É suficiente provar, por exemplo, (41). Para tanto, fixe um $x \in X$ e considere os membros de $\mathcal{F}$ e $\mathcal{H}$ que contêm $x$ e os membros de $\mathcal{F}$ e $\mathcal{H}$ que não contêm $x$ separadamente, e use indução em $n = |X|$.]

36. [Janson, Łuczak, e Ruciński] Sejam $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}([n]) = 2^{[n]}$,

$$X_S = [S \subset \Gamma_{p_1,\ldots,p_n}],$$

e $X = \sum_{S \in \mathcal{S}} X_S$, como em sala. Seja ainda $\Delta = \sum_{A,B} \mathbb{E}(X_A X_B)$, onde a soma é sobre os pares ordenados $(A, B) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S}$ com $A \neq B$ e $A \cap B \neq \emptyset$.

$(i)$ Ponha $\Psi(s) = \mathbb{E}(e^{-sX})$, para todo $s \geq 0$. Prove que

$$\log \mathbb{P}(X = 0) = \int_0^\infty (\log \Psi(s))' \, ds. \tag{42}$$

$(ii)$ Seja $Y_A = \sum_B X_B$, onde a soma é sobre todos os $B \in \mathcal{S}$ com $A \cap B \neq \emptyset$. Prove que

$$\int_0^\infty \mathbb{E}(e^{-sY_A} \mid X_A = 1) \, ds = \mathbb{E}(1/Y_A \mid X_A = 1). \tag{43}$$

$(iii)$ Seja $Y'_A = Y_A - X_A$. Use que $1/(1 + y') \geq 1 - y'/2$ para $y' \geq 1$ para deduzir que

$$\sum_{A \in \mathcal{S}} \mathbb{P}(X_A = 1) \, \mathbb{E}(1/Y_A \mid X_A = 1) \geq \mu - \Delta, \tag{44}$$

onde $\mu = \mathbb{E}(X)$.

$(iv)$ Finalmente, lembre que provamos que

$$-(\log \Psi(s))' \geq \sum_{A \in \mathcal{S}} \mathbb{P}(X_A = 1) \, \mathbb{E}(e^{-sY_A} \mid X_A = 1). \tag{45}$$

Deduza de (42)–(45) que

$$\mathbb{P}(X = 0) \leq e^{-\mu + \Delta}. \tag{46}$$

{*Data de entrega*: 21/11/2002}

37. Vimos dois teoremas de Roth. A grosso modo, estes resultados podem ser enunciados da seguinte forma: $(i)$ Para qualquer $A \subset [N]$, existe uma progressão aritmética $P \subset [N]$ para o qual a discrepância

$$\big||A \cap P| - \eta|P|\big|,$$

onde $\eta = |A|/N$, é 'grande'. $(ii)$ Para qualquer conjunto $A \subset [N]$ com $|A|/N \geq \eta$, onde $\eta > 0$ é uma constante positiva, se $N \geq N_0(\eta)$, então $A$ contém uma progressão aritmética com três elementos. Escreva a prova destes dois resultados em um único texto, de forma organizada, destacando os princípios comuns e as tecnicalidades específicas de cada uma das demonstrações. {*Data de entrega*: 10/12/2002}