

A CONSTANTE DE EULER

DATA DE ENTREGA: 27/10/2002

A constante de Euler é definida como

$$(1) \quad \gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} (H_n - \log n),$$

onde H_n é o n -ésimo número Harmônico:

$$(2) \quad H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{k},$$

e \log denota o logaritmo natural. Sabe-se que

$$(3) \quad \gamma = 0.57721\ 56649\ 01532\ 86060\ 65120\ 90082\ 40243 \dots$$

Neste EP, você deve determinar o valor de γ o mais precisamente possível.

Você deve implementar as seguintes duas idéias, no mínimo.

Método “direto”. Certamente, o método mais fácil é determinar aproximações para γ calculando $H_n - \log n$ para valores grandes de n . Quantas casas decimais de γ você consegue determinar dessa forma? (Compare seu resultado com (3).)

A fórmula da soma de Euler. Em 1732, Euler publicou um método importante para estimar somas. Este método, aplicado a (2), fornece que, para todo m e $n \geq 1$ inteiros, temos

$$(4) \quad H_n = \log n + \gamma + \frac{1}{2n} - \sum_{1 \leq k \leq m} \frac{B_{2k}}{2kn^{2k}} + \theta_{m,n} \frac{B_{2m+2}}{(2m+2)n^{2m+2}},$$

onde $\theta_{m,n}$ é um número entre 0 e 1, e os B_j são os números de Bernoulli:

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_6 = \frac{1}{42}, \quad \dots$$

e

$$B_3 = B_5 = B_7 = \dots = 0.$$

Os números de Bernoulli satisfazem a equação

$$(5) \quad \sum_{0 \leq j \leq m} \binom{m+1}{j} B_j = 0,$$

para todo inteiro $m \geq 1$.

Fixe m , como $m = 2$ e $m = 3$, e desenvolva explicitamente a equação (4). Fixado m , obtenha aproximações para γ usando (4) para valores apropriados de n . (Você consegue prever valores apropriados para n em função da

precisão desejada?) Veja o que você consegue. (Para usar (4) com $m \geq 3$, determine B_8, B_{10}, \dots manualmente.)

O que o programa deve fazer.

- (a) O seu programa deve imprimir uma tabela com valores de

$$n, \quad H_n - \log n, \quad \text{e} \quad -\log_{10} |\gamma - (H_n - \log n)|,$$

incluindo valores grandes de n (inclua valores maiores ou iguais a 10^8). Aqui, você deve usar o valor de γ dado em (3).

- (b) Use (4) para valores adequados de m e n para determinar γ com grande precisão, a menos de um erro de no máximo 10^{-13} (se conseguir erros menores, melhor). Nesta parte, o seu programa deve imprimir uma tabela com valores

$$m, \quad n, \quad \gamma_{m,n}, \quad \text{e} \quad -\log_{10} |\gamma - \gamma_{m,n}|,$$

onde $\gamma_{m,n}$ é a aproximação de γ obtida a partir de (4). Esta tabela deve incluir aproximações $\gamma_{m,n}$ com grande precisão, a menos de um erro de no máximo 10^{-13} em relação ao valor exato de γ fornecido em (3). **Sugestão.** Tente com valores pequenos de m como $m = 2, 3, \dots$ e veja o que você consegue.

Bônus (Só para GRANDES Aventureiros!) Use o método de Euler para determinar γ a menos de um erro de 10^{-100} .

Se você quiser, use que

$$\begin{aligned} \log 2 = & 0.69314718055994530941723212145817656807550013436025 \\ & 52541206800094933936219696947156058633269964186875 \\ & 42001481020570685733685520235758130557032670751635 \\ & 07596193072757082837143519030703862389167347112335 \dots \end{aligned}$$