Lista 1 (=Prova 1).

1P Usando o Método Monte Carlo calcular o seguinte integral.

$$I(\beta_0, \beta_1, \mu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\beta_0+\beta_1 x}}{1+e^{\beta_0+\beta_1 x}} \exp\Big(-\frac{1}{2}(w_0 - x)^2 - \frac{1}{2}(\mu - x)^2\Big) dx \tag{1}$$

1p1

pondo $w_0 = 5$.

(a) Fixando valores β_0, β_1, μ, qual função você usaria para implementar o método de "amostragem de importância"?

(b) Fixando valores β_0, β_1, μ, como você calcularia esse integral usando método de Monte Carlo "direto´´?

(c) Fixa valores $\beta_0 = \beta_1 = \mu = 1$. Qual jeito você escolha e porque? Realize o calculo numérico com o erro $\epsilon = 0.01$.

(d) Executa n vezes o calculo e estima a variância usando Jackknife para diminuir o vies do estimador.

(e) O integral (1) é o integral que depende de parâmetros β_0, β_1 e μ. O objetivo principal (em geral) desses tipos de integrais é ver o integral como uma função desses parametros. Fixamos $\beta_0 = 1$ para diminuir o número de parametros para dois: β_1, μ. Para construir o gráfico $I(\beta_1, \mu)$ em conjunto $(\beta_1, \mu) \in Q = [-1, 1] \times [0, 10]$ existe dois tipos de abordagens. Definimos um reticulado $L = \{-1, -0.8, -0.6, \dots, 0.6, 0.8, 1\} \times \{0, 1, 2, \dots, 10\}$ em Q

(1) cada ponto de reticulado vamos tratar separadamente gerando cada vez uma outra sequencia de variaveis aleatorias

(2) gerando uma vez variaveis aleatorias usaremos valores delas para cada ponto de reticulado.

realize dois jeitos e comenta as diferenças entre eles. Construa o grafico (superficie) em Q. Onde esta o máximo?

2P Consideramos seguinte *processo de bootstrap*. Fixamo tamanho de amostra n. Seja $F = F(x; \theta)$ distribuição populacional e queremos estimar a média $\theta = \int xF(dx)$ usando o processo de bootstrap:

(a) seja $x = (x_1, \dots, x_n)$ uma amostra original;

(b) estimamos $\hat\theta = \bar x$ e geramos primeira replica $y_1 = (y_{11}, \dots, y_{1n})$ usando distribuição $F(\hat\theta)$ (bootstrap parametrico)

(c) concatemos amostras $(xy)_1 = (x_1, \dots, x_n, y_{11}, \dots, y_{1n})$ e calculamos a média $\hat\theta_1 = \overline{(xy)_1}$ e geramos segunda replica $y_2 = (y_{21}, \dots, y_{2n})$ usando distribuição $F(\hat\theta_1)$

(d) ect.

O que podemos falar sobre a sequencia $\hat\theta_n$? Existe o limite $\theta_\infty = \lim_{n\to\infty} \hat\theta_n$? Qual é a distribuição de limite θ_∞ se existe?

1) Representar a fórmula de cálcudo de integral

$$I = \int_0^\infty f(x) e^{-kx} dx, \quad k > 0,$$

usando variável aleatoria ξ com a densidade $p(x) = \alpha e^{-\alpha x}$. Provar que se $f(x) \approx Ax^n$, então a variância vai ser minimal quando $\alpha \approx \alpha_0 = k/(n+1)$.

2) O integral

$$I = \int_1^\infty \frac{sen(2\pi x)}{x} dx$$

pode ser calculado pelo Monte Carlo usando estimação

$$\theta_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} h(U_i) sen(\pi U_i)$$

onde

$$h(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+x)(2k+1+x)}$$

Provar que $E[h(U) sen(\pi U)] = I$.

3) Queremos calcular o integral $I = \int_G f(P)p(P)dP$, onde $f(P) \in L_2(G;p)$. Sejam $\phi_1(P), \dots, \phi_s(P)$ funções ortonormais com médias igual à 1:

$$\int_G \phi_j(P)\phi_k(P)p(P)dP = \delta_{jk}, \ \int_G \phi_j(P)p(P)dP = 0.$$

Consideramos uma familia de estimadores para I

$$\theta_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\Big(f(Q_i) - \sum_{k=1}^{s}\alpha_k\phi_k(Q_i)\Big).$$

onde Q_i independentes pontos com densidade $p(P)$, e $\alpha_i, i = 1, \dots, s$ são parametros.

Provar, que a variância desse estimador é minimal quando

$$\alpha_k = \int_G f(P)\phi_k(P)p(P)dP.$$

Referências

Kahn [1] Kahn H. *Random sampling (Monte Carlo) techniques in neutron attenuation problems.* Nucleonics, **6**, N5, 27-33, 1950.

As [2] S.Asmussen, P.W.Glynn *Stochastic Simulation. Algorithms and Analysis.* Springer. 2010

Ross [3] S.M.Ross (2004) *Simulation.*

CG [4] C.P.Robert and G.Casella *Introducing Monte Carlo Methods with R.* Springer, 2010

CG1 [5] C.P.Robert and G.Casella *Introducing Monte Carlo Methods with R. Solutions to Odd-Numbered Exercises* arxive, 2010

Efron [6] Bradley Efron *The Jackknife, the Bootstrap and Other Resampling Plans* CBMS-NSF Regional conference series in applied mathematics. 1982.