VARIÁVEL ALEATÓRIA
e
DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL

Variável Aleatória

Uma função X que associa a cada elemento ω do espaço amostral Ω um valor $x \in R$ é denominada uma *variável aleatória*.

Experimento: jogar 1 dado duas vezes e observar o resultado
(P = par e I= impar)

X: número de vezes que saiu par em 2 lances do dado

$X = 0 \Leftrightarrow$ II
$X = 1 \Leftrightarrow$ IP ou PI
$X = 2 \Leftrightarrow$ PP

Variável Aleatória

Uma variável aleatória pode ser classificada em:

- Variável aleatória **discreta**
- Variável aleatória **contínua**

Variável Aleatória

- Variável aleatória **discreta**

Uma v.a. é discreta quando o conjunto de valores possíveis que ela assume for finito ou infinito enumerável.

Exemplo:

Observa-se o sexo (característica) das crianças em famílias com três filhos (M: masculino e F: feminino).

Espaço amostral:

$$\Omega = \{(MMM), (MMF), (MFM), (FMM), (MFF), (FMF), (FFM), (FFF)\}$$

ω_1 ω_2 ω_3 ω_4 ω_5 ω_6 ω_7 ω_8

Defina X: nº de crianças do sexo masculino (M).

Ω	MMM	MMF	MFM	FMM	MFF	FMF	FFM	FFF
X	3	2	2	2	1	1	1	0

→ Então X assume valores no conjunto {0, 1, 2, 3}, logo é uma **variável aleatória discreta**.

Exemplo:

No mesmo experimento...

Espaço amostral:

$\mathbf{\Omega}$ = {(MMM), (MMF), (MFM), (FMM), (MFF), (FMF), (FFM),(FFF)}

ω_1 ω_2 ω_3 ω_4 ω_5 ω_6 ω_7 ω_8

Podemos definir agora

$\boldsymbol{Y}$: nº de crianças do sexo feminino (F).

$\mathbf{\Omega}$	MMM	MMF	MFM	FMM	MFF	FMF	FFM	FFF
Y	0	1	1	1	2	2	2	3

→ Então $\boldsymbol{Y}$ também assume valores no conjunto {0, 1, 2, 3}, porém, para outros valores de $\mathbf{\Omega}$.

Variável Aleatória

- Variável aleatória **contínua**

Uma v.a. é contínua quando o conjunto de valores possíveis que ela assume for não enumerável.

Exemplo:

Observa-se o tempo de vida, em horas, de lâmpadas produzidas por uma fábrica.

Defina T: tempo de vida, em horas, da lâmpada escolhida, ao acaso, da fábrica.

$\rightarrow$ Então, T é uma variável aleatória contínua que assume qualquer valor real não negativo.

VARIÁVEL ALEATÓRIA DISCRETA

Caracterização

Função de probabilidade: É a função que atribui a **cada valor x_i da v. a. discreta X** sua probabilidade de ocorrência e pode ser representada pela tabela:

x	x_1	x_2	...	x_n
$P(X=x)$	$P(X=x_1)$	$P(X=x_2)$	...	$P(X=x_n)$

Uma função de probabilidade deve satisfazer:

$$0 \leq P(X = x_i) \leq 1 \qquad \text{e} \qquad \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = 1$$

Exemplo 1:

O Departamento de Estatística é formado por 35 professores, sendo 21 homens e 14 mulheres. Uma comissão de 3 professores será constituída sorteando, ao acaso, três membros do departamento.
Qual é a probabilidade da comissão ser formada por ***pelo menos duas mulheres***?

Vamos definir a v.a.

X: nº de mulheres na comissão.

Quais são os possíveis valores que X pode assumir?

Espaço amostral	Probabilidade	X
(HHH)	$\frac{21}{35}\times\frac{20}{34}\times\frac{19}{33}=0{,}203$	0
(HHM)	$\frac{21}{35}\times\frac{20}{34}\times\frac{14}{33}=0{,}150$	1
(HMH)	$\frac{21}{35}\times\frac{14}{34}\times\frac{20}{33}=0{,}150$	1
(MHH)	$\frac{14}{35}\times\frac{21}{34}\times\frac{20}{33}=0{,}150$	1
(HMM)	$\frac{21}{35}\times\frac{14}{34}\times\frac{13}{33}=0{,}097$	2
(MHM)	$\frac{14}{35}\times\frac{21}{34}\times\frac{13}{33}=0{,}097$	2
(MMH)	$\frac{14}{35}\times\frac{13}{34}\times\frac{21}{33}=0{,}097$	2
(MMM)	$\frac{14}{35}\times\frac{13}{34}\times\frac{12}{33}=0{,}056$	3

x	0	1	2	3
$P(X = x)$	0,203	0,450	0,291	0,056

Assim, $P(X \geq 2)$ = P(X=2) + P(X=3) = 0,291 + 0,056 = 0,347.

Exemplo 2: Um dado é lançado duas vezes, de forma independente. Qual é a probabilidade da ***soma dos pontos nos dois lançamentos ser menor do que 6***?

$$\Omega = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6),$$
$$(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6),$$
$$(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6),$$
$$(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6),$$
$$(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6),$$
$$(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}.$$

Qual é a probabilidade de cada ponto w_i de Ω ?

Admitindo que o dado é perfeitamente homogêneo e sendo os lançamentos independentes,

$$P(w_i) = 1/36 \text{ , qualquer } w_i \in \Omega.$$

Defina X: soma dos pontos nos dois lançamentos do dado.

Função de probabilidade de X: $\Rightarrow$

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X=x)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Então,

$$P(X < 6) = P(X=5) + P(X=4) + P(X=3) + P(X=2)$$
$$= 4/36 + 3/36 + 2/36 + 1/36$$
$$= 10/36 = 0{,}278$$

Podemos estar interessados em outras variáveis aleatórias definidas para o mesmo espaço amostral.

Y: valor máximo obtido dentre os dois lançamentos.

y	1	2	3	4	5	6
$P(Y = y)$	1/36	3/36	5/36	7/36	9/36	11/36

$\Leftarrow$

Z: diferença entre os pontos do 2º e do 1º lançamento.

z	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$P(Z = z)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

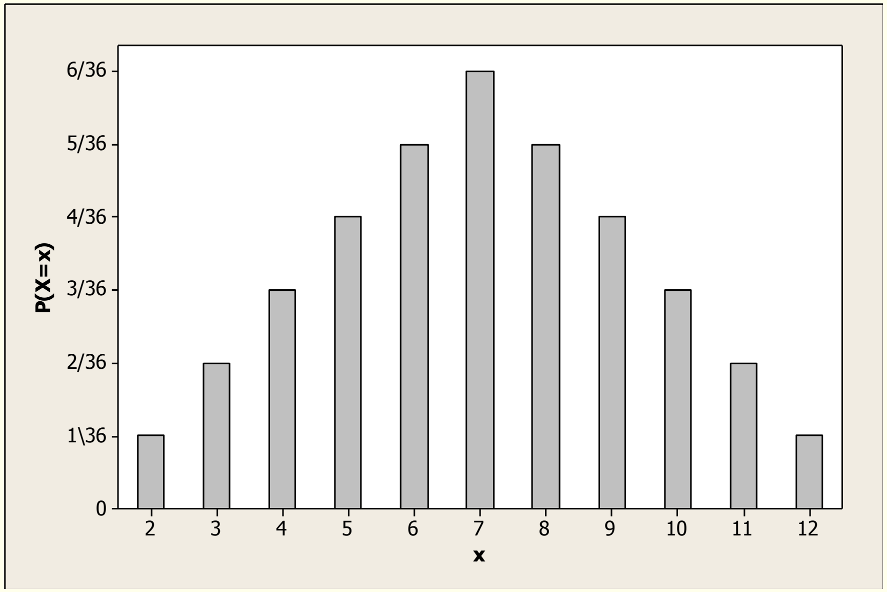
MÉDIA E VARIÂNCIA

Qual é o valor médio da soma dos pontos (X) *no lançamento de dois dados?*

Ω = {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6),
(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6),
(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6),
(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6),
(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6),
(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)}

$\Rightarrow$ 36 pontos igualmente prováveis

x	$P(X = x)$
2	1/36
3	2/36
4	3/36
5	4/36
6	5/36
7	6/36
8	5/36
9	4/36
10	3/36
11	3/36
12	1/36



MÉDIA E VARIÂNCIA

Valor Esperado (média): Dada a v.a. X, assumindo os valores x_1, x_2, ..., x_n, chamamos de ***valor médio***, ou ***valor esperado***, ou ***esperança matemática* de** X o valor

$$E(X) = x_1 \times P(X = x_1) + \ldots + x_n \times P(X = x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \times P(X = x_i)$$

Notação: $\boldsymbol{\mu = E(X)}$

No exemplo, para média de X (soma de pontos), temos:

$E(X) = 2\times(1/36) + 3\times(2/36) + \ldots + 11\times(2/36) + 12\times(1/36)$
$= 252/36 = 7,$

ou seja, em média, a soma dos pontos no lançamento dos dois dados é igual a 7.

Variância: É o valor esperado da v.a. $(X - E(X))^2$, ou seja, se X assume os valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$, então

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n} [x_i - E(X)]^2 \times P(X = x_i)$$

Notação: $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X)$.

Da relação acima, segue que

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

Desvio Padrão: É definido como a raiz quadrada positiva da variância, isto é,

$$\mathrm{DP}(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}.$$

Notação: $\sigma = \mathrm{DP}(X)$.

No exemplo,

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X=x)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

$$\mathrm{Var}(X) = (2-7)^2 \times \frac{1}{36} + (3-7)^2 \times \frac{2}{36} + \ldots + (11-7)^2 \times \frac{2}{36} + (12-7)^2 \times \frac{1}{36}$$

$$= \frac{210}{36} = 5{,}83.$$

Alternativamente, poderíamos calcular

$$E(X^2) = 2^2 \times \frac{1}{36} + 3^2 \times \frac{2}{36} + \ldots + 11^2 \times \frac{2}{36} + 12^2 \times \frac{1}{36}$$

$$= \frac{1974}{36} = 54{,}83$$

e, portanto, $\mathrm{Var}(X) = 54{,}83 - 7^2 = 5{,}83.$

Propriedades:

1) Se $X = a$, em que $\underline{a}$ é uma constante, então

$$E(X) = a \qquad \text{e} \qquad Var(X) = 0.$$

2) Se $Y = aX + b$, em que a e b são constantes, então

$$E(Y) = E(aX + b) = aE(X) + b$$

e

$$Var(Y) = Var(aX + b) = a^2\, Var(X).$$

- MODELOS PROBABILÍSTICOS DISCRETOS -

Modelo de Bernoulli ou Binário

Na prática, existem muitos experimentos que admitem apenas dois resultados.

Exemplos:

- uma peça é classificada como boa ou defeituosa;
- o resultado de um exame médico para detecção de uma doença é positivo ou negativo;
- um paciente submetido a um tratamento, durante um período de tempo fixo, cura-se ou não da doença;
- um entrevistado concorda ou não com a afirmação feita;
- no lançamento de um dado ocorre ou não a face “5”.

Situações com alternativas *dicotômicas* podem ser representadas, genericamente, por respostas do tipo sucesso-fracasso.

Esses experimentos recebem o nome de ***Ensaios de Bernoulli*** e originam uma v.a. com *distribuição de Bernoulli.*

Variável aleatória de Bernoulli: É uma v.a. que assume apenas dois valores:

- ***1*** se ocorrer ***sucesso***,
- ***0*** se ocorrer ***fracasso***.

Geralmente, a probabilidade de sucesso é representada por p, $0 < p < 1$.

"***X ~ Bernoulli (p)***" indica uma v.a. com ***distribuição de Bernoulli*** com parâmetro p, isto é,

$$X = \begin{cases} \mathbf{1}, \text{ se ocorrer "sucesso"} \\ \mathbf{0}, \text{ se ocorrer "fracasso"} \end{cases}$$

e sua função de probabilidade pode ser representada pela tabela

X	1	0
$P(X=x)$	p	$1 - p$

Segue que

$$E(X) = p,$$

$$Var(X) = p(1 - p).$$

$\rightarrow$ Repetições independentes de um ensaio de Bernoulli, com a mesma probabilidade de ocorrência de "sucesso", dão origem ao ***modelo de probabilidade binomial***.

Modelo Binomial

Exemplo: Um dado equilibrado é lançado 3 vezes.
Qual é a probabilidade de se obter a *face 5* duas vezes?

Denotamos,

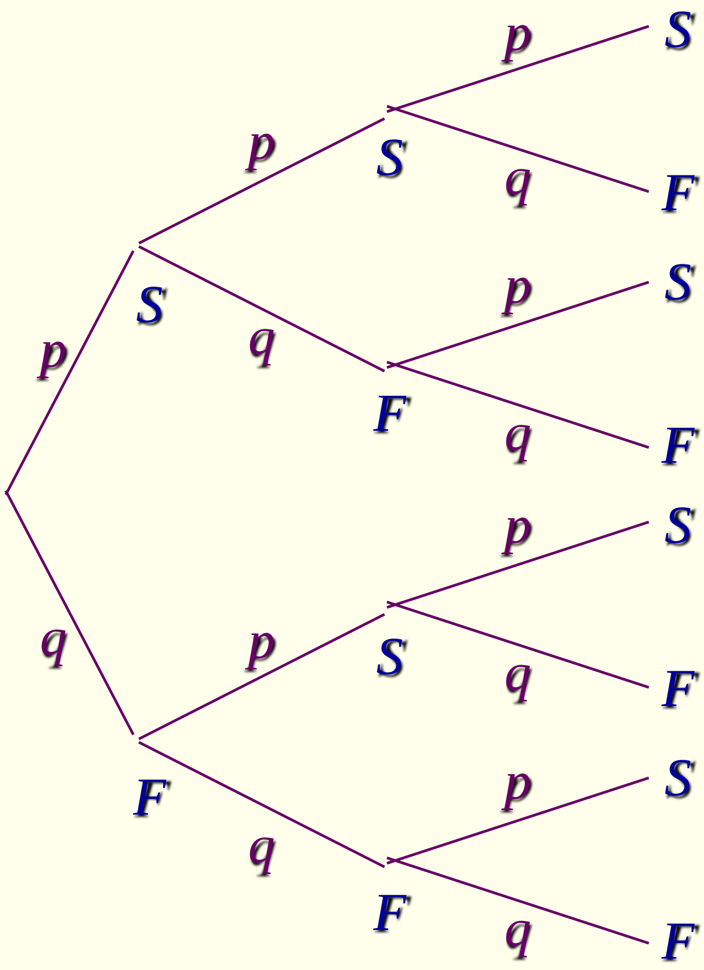
S: "sucesso", ocorrer face 5;
F: "fracasso", não ocorrer face 5.

É fácil ver que $\boldsymbol{p} = P(\text{sucesso}) = 1/6$ e

$$\boldsymbol{q = 1 - p} = P(\text{fracasso}) = 5/6$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \{SSS, SSF, SFS, FSS, SFF, FSF, FFS, FFF\}$$

Estamos interessados no número total de sucessos que, no caso, é o _*número de vezes que a face 5 é observada*_ nos 3 lançamentos do dado.



Ω	Prob	X
(SSS)	p^3	3
(SSF)	p^2q	2
(SFS)	p^2q	2
(SFF)	pq^2	1
(FSS)	p^2q	2
(FSF)	pq^2	1
(FFS)	pq^2	1
(FFF)	q^3	0

A função de probabilidade de X é dada por:

Probabilidades binomiais para n = 3 e $P(S) = p$		
nº. de sucessos	**probabilidades**	**p = 1/6**
0	q^3	125/216=0,5787
1	$3pq^2$	75/216=0,3472
2	$3p^2q$	15/216=0,0694
3	p^3	1/216=0,0046

Podemos escrever essa função como

$$P(X = k) = \binom{3}{k} p^k \, q^{3-k} \quad , \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

No exemplo, para **n = 3** e **p = 1/6**, $P(X = 2) = 0{,}0694$.

Distribuição binomial:

A v.a. X correspondente ao **número de sucessos em n ensaios de Bernoulli independentes e com mesma probabilidade p de sucesso** tem *distribuição binomial com parâmetros n e p.*

Sua função de probabilidade é dada por

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \quad , \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Notação: $\boldsymbol{X \sim B(n; p)}$.

Resultado: Se $X \sim B(n; p)$, então

média: $\mu = \mathrm{E}(X) = n \times p$

variância: $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = n \times p \times (1-p)$

Exemplo utilizando o R:

Considere uma prova com 12 questões, cada uma com 4 alternativas. Suponha que o aluno escolha as respostas ao acaso. Qual é a probabilidade de que ele ***acerte pelo menos 6 questões***?

X: nº de questões que o aluno acertará

X pode assumir valores no conjunto {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 ou 12}.

$X \sim B(12;\, 0{,}25)$

$$\boxed{P(X = x) = \binom{12}{x} 0{,}25^{x} (1 - 0{,}25)^{12 - x}}$$

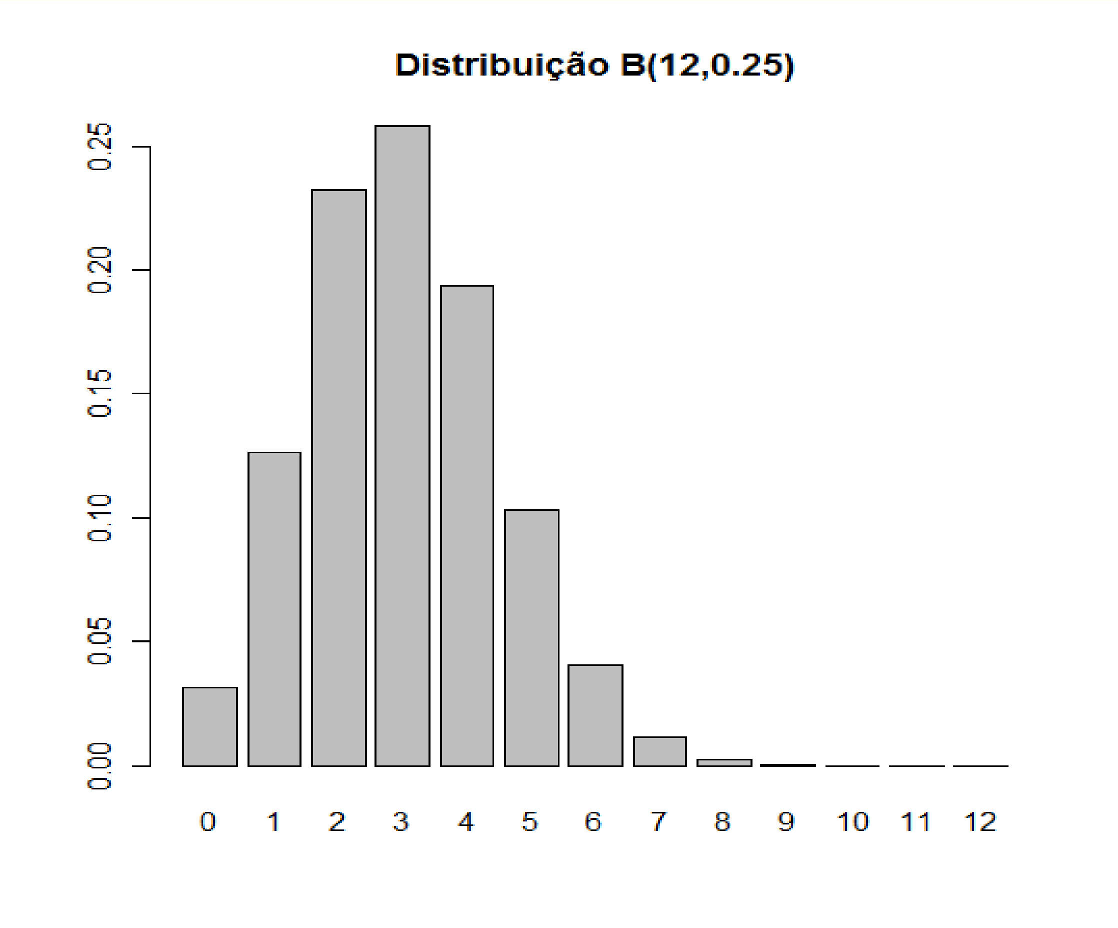
$\Downarrow$

Uso do MINITAB para os cálculos!

No R, probabilidades

```
> dbinom(0:12,12,0.25)
 [1] 3.167635e-02 1.267054e-01 2.322932e-01 2.581036e-01 1.935777e-01
 [6] 1.032414e-01 4.014945e-02 1.147127e-02 2.389848e-03 3.540516e-04
[11] 3.540516e-05 2.145767e-06 5.960464e-08
```

```
> cbind(0:12,dbinom(0:12,12,0.25))
      [,1]         [,2]
 [1,]    0 3.167635e-02
 [2,]    1 1.267054e-01
 [3,]    2 2.322932e-01
 [4,]    3 2.581036e-01
 [5,]    4 1.935777e-01
 [6,]    5 1.032414e-01
 [7,]    6 4.014945e-02
 [8,]    7 1.147127e-02
 [9,]    8 2.389848e-03
[10,]    9 3.540516e-04
[11,]   10 3.540516e-05
[12,]   11 2.145767e-06
[13,]   12 5.960464e-08
```

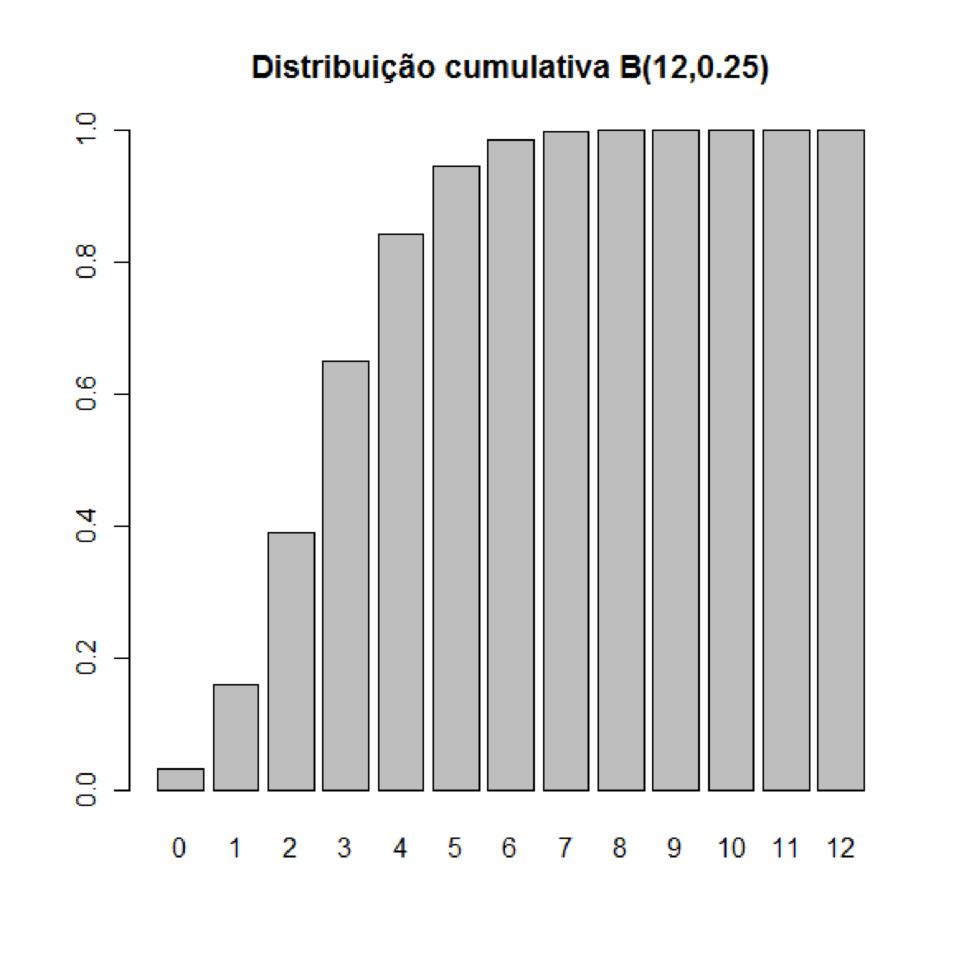



```
> barplot(dbinom(0:12,12,0.25),names.arg=0:12,main="Distribuição B(12,0.25)")
```

No R, distribuição cumulativa $P(X \leq x)$

```
> pbinom(0:12,12,0.25)
 [1] 0.03167635 0.15838176 0.39067501 0.64877862 0.84235632 0.94559777
 [7] 0.98574722 0.99721849 0.99960834 0.99996239 0.99999779 0.99999994
[13] 1.00000000

> cbind(0:12,pbinom(0:12,12,0.25))
      [,1]       [,2]
 [1,]    0 0.03167635
 [2,]    1 0.15838176
 [3,]    2 0.39067501
 [4,]    3 0.64877862
 [5,]    4 0.84235632
 [6,]    5 0.94559777
 [7,]    6 0.98574722
 [8,]    7 0.99721849
 [9,]    8 0.99960834
[10,]    9 0.99996239
[11,]   10 0.99999779
[12,]   11 0.99999994
[13,]   12 1.00000000
```




```
> barplot(pbinom(0:12,12,0.25),names.arg=0:12,main="Distribuição cumulativa B(12,0.25)")
```

No R, calcularemos $P(X \geq 6)$

```
> 1-pbinom(5,12,0.25)
[1] 0.05440223
> pbinom(5,12,0.25,lower.tail=FALSE)
[1] 0.05440223
```

$1 - P(X \leq 5) = P(X \geq 6)$

calcula a probabilidade $P(X > 5) = P(X \geq 6)$

A média é

$E(X) = n \times p = 12 \times 0{,}25 = 3$,

ou seja, *em média*, o aluno que responder ao acaso todas as questões acertará 3.