Lista 9. Cadeias de Markov III (tempo contínuo). Gabarito.

Solução Exercício 2. Seja $X(\cdot)$ processo de Poisson com taxa λ e seja $T \sim exp(v)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X(T)=n) &= \int_0^\infty \mathbb{P}(X(T)=n \mid T=t) f_T(t)dt \;=\; \int_0^\infty \mathbb{P}(X(t)=n) f_T(t)dt \\
&= \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} v e^{-vt} dt \;=\; \frac{v}{\lambda+v}\left(\frac{\lambda}{\lambda+v}\right)^n \int_0^\infty \frac{((\lambda+v)t)^n}{n!}(\lambda+v)e^{-(\lambda+v)t}dt \\
&= \frac{v}{\lambda+v}\left(\frac{\lambda}{\lambda+v}\right)^n, \; n=0,1,2,\ldots
\end{aligned}$$

onde usamos o fato que a soma de $n+1$ exponenciais, i.i.d. X_i com parâmetro λ tem a densidade

$$f_{X_1+\cdots+X_{n+1}}(t) = \lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad t \geq 0.$$

□

Solução Exercício 3. Sequencia $T_i \sim exp(\lambda)$ em que T_i são i.i.d. Em instantes $\tau_i = T_1 + \cdots + T_i$ aparece um indivíduo na população.

a) Caso em instante inicial $t=0$ não tivemos nenhum indivíduo na população, sim, esse processo forma um processo de nascimento e morte, porque esse processo é o processo de Poisson (processo de contagem) com a taxa λ. Neste caso: $\lambda_n \equiv \lambda$ e $\mu_n \equiv 0$.

b) Qualquer que seja $m \geq 0$ o processo $X(t) \to \infty$ quando $t \to \infty$, ou seja, a população aumenta conforme o tempo cresce. Isso pode ser visto por exemplo de seguinte modo. Seja n um instante de tempo fixo. Estudamos a probabilidade $\mathbb{P}(X(n) \leq N)$ para algum N fixo quando $n \to \infty$:

$$\mathbb{P}(X(n) \leq N) = \sum_{k=0}^{N} \frac{(\lambda n)^k}{k!} e^{-\lambda n} \to 0, \text{ quando } n \to \infty \text{ e } N \text{ é fixo.}$$

Já que podemos escolher N qualquer, obtemos que no limite

$$\lim_{N\to\infty}\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X(n) \leq N) = 0.$$

O que mostra que $\lim_{t\to\infty} X(t) = \infty$.

Outra possibilidade de provar isso, é por exemplo, provar que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X(n) \leq \sqrt{n}) = 0.$$

□

Solução Exercício 4. Sequencia $T_i \sim exp(\lambda)$ em que T_i são i.i.d. Em instantes $\tau_i = T_1 + \cdots + T_i$ aparece um X_i indivíduos na população.

a) Observe, que se $X(0)=0$ então isso permanece para qualquer $t>0$: $X(t)=0$, i.e. o estado 0 é estado absorvente. Supomos que $X(0)=1$, e em cada estado $k \in \mathbb{N} = \{1,2,\ldots\}$ o processo permanece tempo exponencial com a taxa λ, o que significa que $v_k \equiv \lambda$ para qualquer $k>0$. Cada entre esses k indivíduos gera ou não (com probabilidade p) um novo indivíduo, assim, total indivíduos gerados $\xi \sim B(k,p)$, i.e.

$$p_{k,k+d} = \begin{cases} 0, & \text{se } d<0, \text{ ou } d>k; \\ \binom{k}{d}p^d(1-p)^{k-d}, & \text{se } 0 \leq d \leq k. \end{cases}$$

Mas, observe, que existe a probabilidade $p_{kk}>0$, o que contradiz com a definição de processo em termos v_i, p_{ij}. Para definir processo, vamos precisar de redefinir as probabilidades de transição e taxas v_i: se o processo esta em estado k, então depois de tempo exponencial com taxa λ ele pode pular em outro estado com probabilidade $1-(1-p)^k$ ou permanecer no mesmo estado k com probabilidade $(1-p)^k$; isso significa que o processo permanece em estado k coma taxa

$$v_k = \lambda(1-(1-p)^k);$$

o que pode ser provado usando densidades de somas de exponenciais com taxa λ: a densidade de tempo de permanência no estado é

$$g(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^m}{m!} (1-p)^{km} (1-(1-p)^k) = \lambda(1-(1-p)^k) e^{-\lambda(1-(1-p)^k)};$$

e pula para outro estado com probabilidade condicional, que pelo menos um indivíduo foi criado:

$$p_{k,k+d} = \begin{cases} 0, & \text{se } d \leq 0, \text{ ou } d > k; \\ \left(1-(1-p)^k\right)^{-1} \binom{k}{d} p^d (1-p)^{k-d}, & \text{se } 0 \leq d \leq k. \end{cases}$$

b) Não. Os incrementos de processo de nascimento e morte são ± 1. O que não é o caso para esse processo.

c) O limite $\lim_{t\to\infty} X(t) = \infty$, o que pode ser visto, por exemplo, de seguinte forma. Seja Y processo de Poisson com a taxa λp (o que corresponde a taxa $\lambda(1-(1-p)^k)$ quando $k = 1$ valor minimal possível). Assim para qualquer estado $k \geq 1$

$$\lambda(1-(1-p)^k) \geq \lambda p$$

ou o processo Y é "mais devagar" de que o processo X, o que significa que o processo X é maior de que o processo Y quase sempre (isso precisa de uma prova rigorosa usando acoplamento de processos, por exemplo, mas intuitivamente isso é claro)

$$Y(t) \leq X(t) \text{ quase certamente para qualquer } t > 0. \tag{1}$$

Mas em exercício anterior, 3b, vimos que o processo de Poisson converge para infinito, isso, pela dominância significa que X também converge para infinito.

d) Nunca.

□