Lista 9. Cadeias de Markov com tempo contínuo I.

1. (2 pontos) Uma população de alguns organismos consiste em dois sexos - fêmeas e machos. Em uma colónia cada macho e fêmea formam um casal em intervalo h de tempo com probabilidade $\lambda h + o(h)$ e no mesmo instante eles produzem um organismo com a mesma probabilidade de ser macho ou fêmea. Cada organismo deixa a colônia durante tempo h com a probabilidade $\mu h + o(h)$. Sejam $N_1(t)$ e $N_2(t)$ número de machos e fêmeas respectivamente dentro da colônia. Descrever a cadeia de Markov com tempo contínuo que descreve a evolução dessa colônia: descrever o conjunto de estados S da cadeia

   (a) em temos de taxas de transição $q_{i,j}, i, j \in S, i \neq j$;

   (b) em temos de taxas de permanência $v_i, i \in S$ e as probabilidades de transição $p_{i,j}, i, j \in S, i \neq j$.

2. (2 pontos) Consideramos simples modelo estocástico de propagação de infecção conhecida em sua versão determinista como modelo SIR (**S**usceptible, **I**nfectious, **R**ecovered):

   - consideramos N indivíduos de uma pequena colônia;
   - inicialmente temos $k, 0 < k < N$ infectados e $N - k$ suscetíveis;
   - cada infectado contamina um indivíduo suscetível com a taxa λ;
   - cada infectado vai ser curado (recuperado) e consequentemente imunizado (não pode mais ser contaminado) com a taxa μ.

   Descrever o modelo como cadeia de Markov com tempo contínuo, considerando que cada indivíduo pode estar em um dos três estados: infectado, suscetível e imunizado (recuperado)

   (a) em temos de taxas de transição $q_{i,j}, i, j \in S, i \neq j$;

   (b) em temos de taxas de permanência $v_i, i \in S$ e as probabilidades de transição $p_{i,j}, i, j \in S, i \neq j$.

3. (2 pontos) Uma seguradora modela o tempo de vida de um indivíduo, como uma sequência de quatro estágios sequenciais de envelhecimento, A, B, C e D. Todas as taxas de transições A $\rightarrow$ B $\rightarrow$ C $\rightarrow$ D $\rightarrow$ "Morte"ocorrem com a mesma taxa λ. Segundo essa visão, qual é a distribuição (densidade) de tempo de vida de um indivíduo? Achar a média e a variância de tempo de vida. (Dica: lembrar a distribuição de soma dos exponenciais, que estudamos nas aulas de Poisson)

4. (4 pontos) Um carro pode estar em três estados: F (funcional), R (em reparação) e P (perda total), em que o estado P é estado absorvente. As transições entre os estados são descritos de seguinte forma: todas as taxas de transições F $\rightarrow$ R, R $\rightarrow$ F, e R $\rightarrow$ P, são iguais e igual à λ. Achar a densidade de vida útil (em estado F) de um carro. (Dica: lembrar a distribuição de soma dos exponenciais independentes com a mesma taxa, que estudamos nas aulas de Poisson, e represente a densidade da vida útil nada mais como a mistura das densidades)