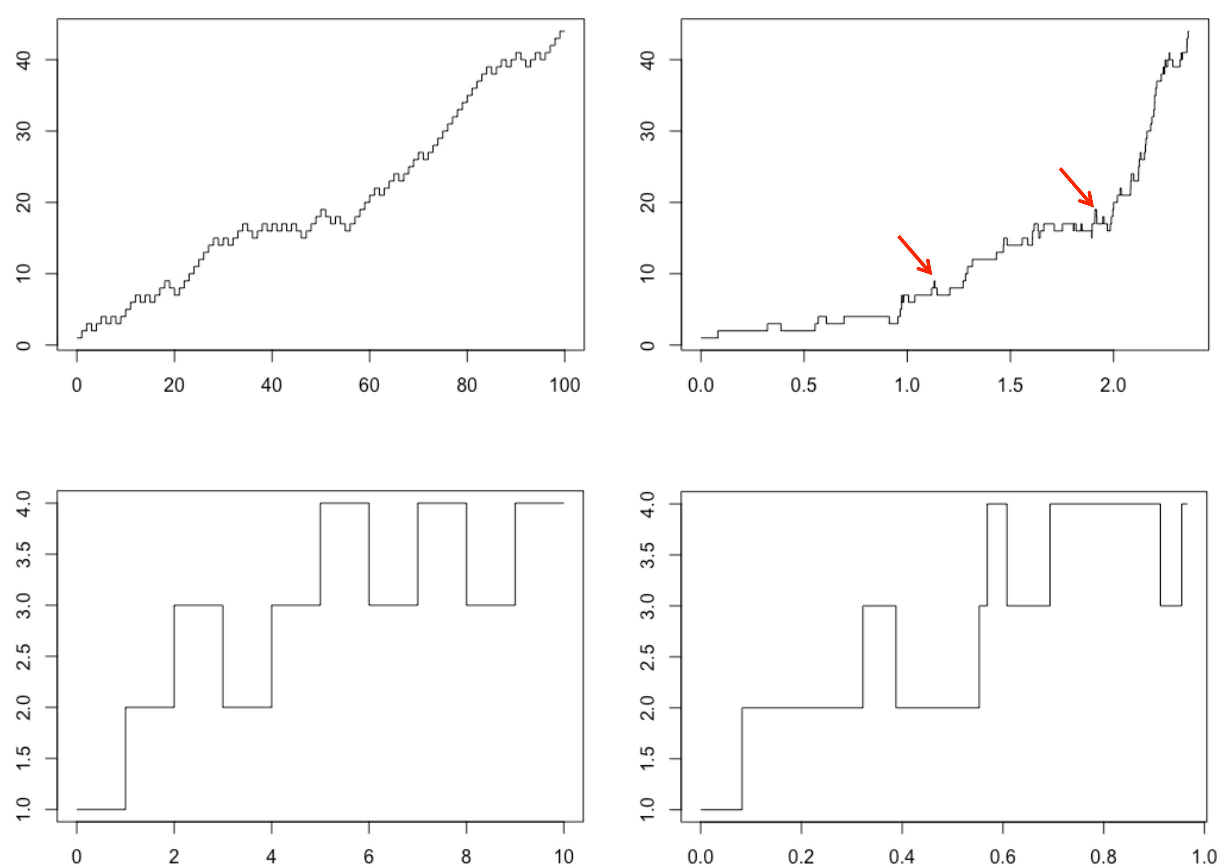
Lista 9. Cadeias de Markov com tempo contínuo I.

1. Descrevemos cadeia de Markov com tempo contínuo através de conjunto de taxas $v_i, i \in S$ (a taxa da distribuição exponencial de tempo de permanência em estado i) e probabilidades de transição $p_{i,j}, i, j \in S$ e $i \neq j$. Mas o jeito mais comum de descrever a cadeia de Markov com o tempo contínuo é através de taxas de transição $q_{i,j}, i, j \in S$: com a cada transição $i \to j$ associamos uma exponencial $T_{i,j}$ $\exp(q_i i, j)$, o tempo de transição. A cadeia que está em estado i vai escolher aquele próximo estado cujo o tempo de transição é menor entre todos possíveis. Mostre que $q_{i,j} = v_i p_{i,j}$, e que $v_i = \sum_{j \neq i} q_{i,j}$.

2. Simulamos uma trajetória de processo de nascimento e morte não homogêneo com taxas $\lambda_n = \lambda \cdot n$ e $\mu_n = \mu \cdot n$, para $n \geq 1$ e $\lambda_0 = 1, \mu_0 = 0$, em que para simulação numérica escolhemos $\lambda = 2$ e $\mu = 1$. A trajetória começou de estado 1. Na figura essa trajetória é representada de ponto de vista de processo com tempo contínuo e de ponto de vista da cadeia embutida com numero de pulos 100 e 10.

1. Descrevemos cadeia de Markov com tempo contínuo através de conjunto de taxas $v_n, n \geq 0$ e probabilidades de transição $p_{i,j}$. Achar taxas v_n e probabilidades de transição para esse processo. Achar taxas de transição.
2. No gráfico a direita as setas indicam alguns estados dessa trajetória. Achar o correspondente estado em gráfico de lado esquerdo.
3. A cadeia embutida está representada na figura esquerda ou direita? Descreve as probabilidades de transição para a cadeia embutida.
4. Como você explica a diferença em perfil da trajetória em representação esquerda e direita?
5. Como a trajetória vai se comportar ao longo prazo? Você acha que a cadeia é transiente? Conforme o aumento do tempo a trajetória vai para infinito? Ou ela sempre vai voltar para estado 1 ou 0?



3. Sabe-se que o Processo de Poisson com a taxa λ pode ser considerado como o processo de nascimento e morte. Denotamos o processo como $X(t)$. Descreve as taxas desse processo de nascimento e morte. Em exemplo 6 da apostila considera-se procedimento de calculo da esperança de tempo T_n o tempo que leva o processo saindo de estado n primeira vez chegar no estado $n+1$: $T_n = \min\{t > 0 : \ X(t) = n+1\}$ sabendo que $X(0) = n$. Achar a média do tempo $\mathbb{E}(T_n)$ lembrando a definição de Processo de Poisson. Conferir a fórmula com a fórmula obtida em exemplo 6 para processo de nascimento e morte. Você sabe que a fórmula deve ser a mesma.

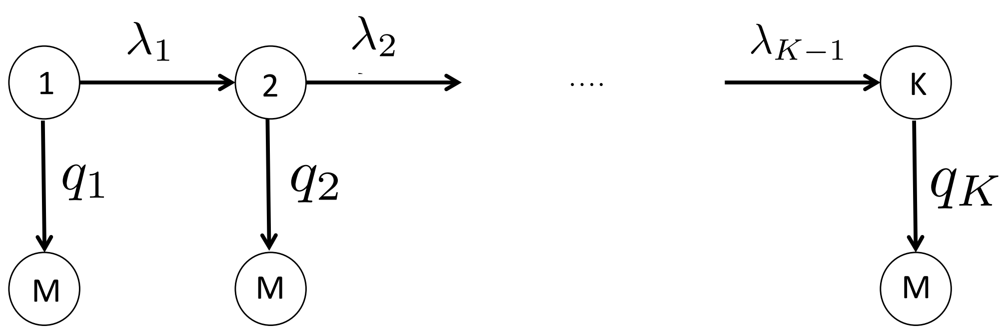
4. A vida de um individuo para uma seguradora de vida é representada como a sequencia anual de individuo em um dos dois estados 0 (morto) ou 1 (vivo). A sequencia anual pode ser representada como uma sequência com transição não homogênea: se um individuo (vivo) tem n anos, a probabilidade de que ele está vivo no próximo ano $n+1$ é $p_{n,1\to 1}$.

1. Represente essa visão como cadeia de Markov (com tempo discreto), descrevendo os estados da cadeia e as probabilidades de transição.

2. Achar a distribuição de tempo de vida de individuo segundo esse modelo.

3. Como vai ser a distribuição de item anterior, se nos supomos seguinte dependência de probabilidade de transição: $p_{n,1\to 1} = 1 - q^n, n = 0, 1, \ldots$.

Um modelo alternativo de envelhecimento é modelo de envelhecimento fisiológico em que um individuo encontra-se em um dos K estados fisiológicos $\{1, 2, \ldots, K\}$ quando individuo é vivo, e estado "M"(morto). A taxas de transição são representados no seguinte gráfico:



O modelo é cadeia de Markov com tempo contínuo.

1. Descreve esse modelo como cadeia de Markov (com tempo contínuo) descrevendo os estados da cadeia S e as taxas de transição $q_{i,j}$.

2. Descreve esse modelo como cadeia de Markov descrevendo as taxas v_i de permanência em estado e probabilidades de transição $p_{i,j}$.

3. Supondo que todos $\lambda_i \equiv \lambda$ e todos $q_i \equiv q$, consegue achar a distribuição de tempo de vida de individuo?