Aula 9. Cadeias de Markov com tempo continuo I.

Definição

Começamos com a definição. O conjunto de variáveis $\{X(t), t \geq 0\}$ com o espaço enumeravel S dos estados, chama-se uma cadéia de Markov com o tempo contínuo, se para quaisquer $t > s > u$

$$P\{X(t) = j \mid X(s) = i, X(u) = k\} = P\{X(t) = j \mid X(s) = i\} \tag{1}$$

Notamos que a definição pode ser usada para caso do tempo discreto também, somente definir o conjunto de valores do "tempo". Se $t \in \mathbb{R}$ então digamos que temos o tempo contínuo. Se $t \in \mathbb{Z}$, neste caso digamos que o tempo é discreto. Nós continuamos usar a expressão "cadeia de Markov", pois a palavra "cadeia"reflete o fato que os estados (valores de variáveis $X(t)$) pertencem ao mesmo conjunto, e conjunto *enumerável*.

Probabilidade $P\{X(t) = j \mid X(s) = i\}$ chama-se a probabilidade de transisão, e podemos anotar ela como $p_{ij}(s,t)$. Caso a função $p_{ij}(s,t)$ depende do comprimento do intervalo do tempo $t - s$, neste caso a cadeia chama-se a cadeia homogênea.

Propreiedade de falta da memoria

Supomos que a cadeia $X(t)$ esta em estado i fixo em instante 0. Qual é a distribuição do tempo de cadeia permanecer neste estado, antes de mudar para o outro estado? Anotamos esse tempo T_i.

$$T_i = \min\{t : \ X(t) \neq i \text{ dado } X(0) = i\}. \tag{2}$$

Provaremos que a distribuição desse tempo é exponencial. Para isso provamos que esse tempo satisfaz a condição de falta da memoria.

$$\begin{aligned}&P\{T_i > t + s \mid T_i > s, \ X(0) = i\} = P\{T_i > t + s \mid X(u) = i, 0 \leq u \leq s\} \\ &= P\{T_i > t + s \mid X(s) = i\} = P\{T_i > t \mid X(0) = i\}\end{aligned}$$

Definição alternativa

Podemos descrever agora a cadeia em outra maneira. $\{X(t)\}$ chama-se cadeia de Markov, se

1. tempo que a cadeia fica em estado i tem a distribuição exponencial com a taxa v_i;
2. quando a cadeia saia do estado i a escolha do outro estado ocorre com a probabilidade p_{ij}, onde $i \neq j$, e $\sum_{j \neq i} p_{ij} = 1$, e $p_{ii} = 0$, para cada estado i.

Cadeia embutida

Seja $T_1 < T_2 < \cdots < T_n < \dots$ instantes quando a cadeia $X(t)$ altera o seu estado. Consideramos variaveis $X_n = X(T_n)$. A sequencia X_n forma uma cadeia de Markov com as probabilidades de transições p_{ij}.

Processo de Poisson é cadeia de Markov

Para o processo de Poisson, mostrar que $v_i = \lambda$ e $p_{ij} = 1$ se $j = i + 1$ e $p_{ij} = 0$ caso contrario. Para o processo de Poisson sabemos também que $p_{ij}(t) = (\lambda t)^{|j-i|} e^{-\lambda t}/(j - i)!$.

A cadeia embutida para processo de Poisson é trivial. As transições $i \to i + 1$ ocorrem com a probabilidade 1.

Processo de nascimento e morte.

Consideramos uma cadeia com conjunto de estados $\mathbb{N}$, que vai ser interpretada como o número de indivíduos (pessoas, partículas, ect.) em um sistema (pode ser sistema de filas). Se a cadeia está em estado n (se o número de indivíduos no sistema é igual à n), então

1. um novo indivíduo aparece no sistema com a taxa exponencial λ_n (taxa de chegada ou taxa de nascimento);
2. um indivíduo deixa o sistema com a taxa exponencial μ_n (taxa de partida, ou taxa de morte).

Em termos $\{v_i\}$ e $\{p_{ij}\}$:

$$v_0 = \lambda_0,\ v_i = \lambda_i + \mu_i$$
$$p_{01} = 1,\ p_{i,i+1} = \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i},\ p_{i,i-1} = \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i}$$

Exemplo 1. Processo de Poisson é processo de nascimento e morte com $\lambda_n = \lambda$ e $\mu_n = 0$.
Exemplo 2. (Processo de nascimento com taxa de nascimento linear) Cada indivíduo espera o tempo exponencial com a taxa λ para dar a luz um "filho"dele. Assim $\lambda_n = n\lambda, n \geq 0$. Esse processo é conhecido também como o processo do Yule, depois de G.Yule usar ele em teoria matematica da evolução.
Exemplo 3. (Modelo de crescimento linear com immigração) Neste caso $\mu_n = n\mu,\ n \geq 1$ e $\lambda_n = n\lambda + \theta,\ n \geq 0$. Seja $X(t)$ tamanho de população em instante t. Vamos achar neste caso o tamanho médio de população $m(t) = E[X(t)]$. Vamos derivar a equação para $m(t)$. Para isso consideramos o incremento da media em pequeno lapso de tempo h; o que pode ocorrer durante este tempo?

$$X(t+h) = \begin{cases} X(t)+1, & \text{com probabilidade } (\theta + \lambda X(t))h + o(h) \\ X(t)-1, & \text{com probabilidade } X(t)\mu h + o(h) \\ X(t), & \text{com probabilidade } 1 - (\theta + \lambda X(t) + \mu X(t))h + o(h) \end{cases}$$

então

$$\begin{aligned} & E(X(t+h) \mid X(t)) = X(t) + (\theta + \lambda X(t) - \mu X(t))h + o(h) \\ & m(t+h) = m(t) + (\lambda - \mu)m(t)h + \theta h + o(h) \\ & \Leftrightarrow \frac{m(t+h) - m(t)}{h} = (\lambda - \mu)m(t) + \theta + \frac{o(h)}{h} \\ & \Leftrightarrow m'(t) = (\lambda - \mu)m(t) + \theta \end{aligned} \tag{3}$$

Seja $h(t) = (\lambda - \mu)m(t) + \theta$, então se $m(t)$ satisfaz equação (3), então $h(t)$ vai satisfazer a equação $h'(t)/(\lambda - \mu) = h(t)$ e a integração vai dar $\log(h(t)) = (\lambda - \mu)t + c$ ou $h(t) = Ke^{(\lambda-\mu)t}$. Para achar K colocaremos condição inicical: $m(0) = i$. O que vai dar $K = \theta + (\lambda - \mu)i$ assim

$$m(t) = \frac{\theta}{\lambda - \mu}(e^{(\lambda-\mu)t} - 1) + ie^{(\lambda-\mu)t} \tag{4}$$

se $\lambda = \mu$ então $m'(t) = \theta$ e

$$m(t) = \theta t + i. \tag{5}$$

Exemplo 4. (M/M/1) $\mu_n = \mu,\ n \geq 1,\ \lambda_n = \lambda,\ n \geq 0$.
Exemplo 5. (M/M/s)

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu, & 1 \leq n \leq s \\ s\mu, & n > s \end{cases} \qquad \lambda_n = \lambda,\ n \geq 0.$$

Exemplo 6. Consideramos um processo de nascimento e morte geral, $X(t)$, com as taxas de transição λ_n, μ_n; em que supomos que $\mu_0 = 0$. Supomos que o processo começa evoluir em tempo do estado i, seja $T_i = \min\{t > 0 : X(t) = i+1\}$. Estabelecemos aquí uma formula recursiva para calcular $E(T_i)$.

Primeiramente observamos que $E(T_0) = 1/\lambda_0$.

Para $i > 0$ primeiro calcularemos as médias condicionando pelo primero passo: $I_i = 1$ caso primeiro passo foi $i \to i+1$ e $I_i = -1$ caso primeiro passo foi $i \to i-1$; variável I_i é nada mais como incremento do primeiro passo.

$$\begin{aligned} E(T_i \mid I_i = 1) &= \tfrac{1}{\lambda_i + \mu_i}, \\ E(T_i \mid I_i = -1) &= \tfrac{1}{\lambda_i + \mu_i} + E(T_{i-1}) + E(T_i). \end{aligned} \tag{6}$$

Assim, logo

$$\begin{aligned} E(T_i) &= E(T_i \mid I_i = 1)P(I_i = 1) + E(T_i \mid I_i = -1)P(I_i = -1) \\ &= \frac{1}{\lambda_i + \mu_i} \cdot \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i} + \Big(\frac{1}{\lambda_i + \mu_i} + E(T_{i-1}) + E(T_i)\Big) \cdot \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} \\ &= \frac{1}{\lambda_i + \mu_i} + \big(E(T_{i-1}) + E(T_i)\big)\frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} \end{aligned}$$

ou

$$E(T_i) = \frac{1}{\lambda_i} + \frac{\mu_i}{\lambda_i}E(T_{i-1}) \tag{7}$$

Exemplo 6. Consideramos um caso particular para formula (7): seja $\lambda_n \equiv \lambda$ e $\mu_n \equiv \mu$. Neste caso conseguimos a formula fechada para $E(T_i)$. A formula (8) possua neste caso seguinte forma.

$$E(T_i) = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}E(T_{i-1}) = \frac{1}{\lambda}\Big(1 + \mu E(T_{i-1})\Big). \tag{8}$$

Começando com

$$\begin{aligned}
E(T_1) &= \frac{1}{\lambda}\Big(1+\frac{\mu}{\lambda}\Big)\\
E(T_2) &= \frac{1}{\lambda}\Big(1+\frac{\mu}{\lambda}+\Big(\frac{\mu}{\lambda}\Big)^2\Big)\\
\vdots\quad &\quad \vdots\\
E(T_i) &= \frac{1}{\lambda}\Big(1+\frac{\mu}{\lambda}+\Big(\frac{\mu}{\lambda}\Big)^2+\cdots+\Big(\frac{\mu}{\lambda}\Big)^i\Big)\\
&= \frac{1-(\mu/\lambda)^{i+1}}{\lambda-\mu}, \quad i \geq 0 \text{ and } \lambda \neq \mu;\\
&= \frac{i+1}{\lambda}, \quad i \geq 0 \text{ and } \lambda = \mu;
\end{aligned}$$

Observação: caso quando queremos achar a média do tempo $T_{i\to j}$, quando $j > i$, então

$$\begin{aligned}
E(T_{i\to j}) &= \sum_{n=i}^{j-1} E(T_n) = \sum_{n=i}^{j-1} \frac{1-(\mu/\lambda)^{n+1}}{\lambda-\mu}\\
&= \frac{j-i}{\lambda-\mu} - \frac{(\mu/\lambda)^{i+1}}{\lambda-\mu}\cdot\frac{1-(\mu/\lambda)^{j-i}}{1-\mu/\lambda} \text{ quando } 0 \leq i < j \text{ and } \mu \neq \lambda\\
&= \frac{j(j+1)-i(i+1)}{2\lambda} \text{ quando } 0 \leq i < j \text{ and } \mu = \lambda.
\end{aligned}$$

Exemplo 7. Calcularemos aquí a variância de $T_{0\to j}$. Notamos que a equação (6) pode ser descrita de seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
E(T_i \mid I_i) &= \frac{1}{\lambda_i+\mu_i} + \frac{1-I_i}{2}\cdot\big(E(T_{i-1})+E(T_i)\big)\\
Var\big((E(T_i \mid I_i)\big) &= Var\Big(\frac{1-I_i}{2}\Big)\big(E(T_{i-1})+E(T_i)\big)^2\\
&= \frac{\lambda_i\mu_i}{(\lambda_i+\mu_i)^2}\big(E(T_{i-1})+E(T_i)\big)^2
\end{aligned}$$

em que

$$Var\Big(\frac{1-I_i}{2}\Big) = \frac{1}{4}Var(I_i) = \frac{1}{4}\big(E(I_i^2)-(E(I_i)^2)\big) = \frac{1}{4}\Big(1-\Big(\frac{\lambda_i-\mu_i}{\lambda_i+\mu_i}\Big)^2\Big) = \frac{\lambda_i\mu_i}{(\lambda_i+\mu_i)^2}.$$

Seja X_i é tempo de estar em estado i até momento de transição, então

$$Var(T_i \mid I_i = 1) = Var(X_i \mid I_i = 1) = Var(X_i) = \frac{1}{(\lambda_i+\mu_i)^2} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
Var(T_i \mid I_i = -1) &= Var(X_i + T_{i-1} + T_i) = Var(X_i) + Var(T_{i-1}) + Var(T_i) \qquad (10)\\
&= \frac{1}{(\lambda_i+\mu_i)^2} + Var(T_{i-1}) + Var(T_i).
\end{aligned}$$

Assim (9) e (10) podem ser unidas como

$$Var(T_i \mid I_i) = \frac{1}{(\lambda_i+\mu_i)^2} + \frac{1-I_i}{2}\big(Var(T_{i-1})+Var(T_i)\big).$$

Logo,

$$E\big(Var(T_i \mid I_i)\big) = \frac{1}{(\lambda_i+\mu_i)^2} + \frac{\mu_i}{\lambda_i+\mu_i}\big(Var(T_{i-1})+Var(T_i)\big).$$

Usando a fórmula para variância condicional obtemos

$$\begin{aligned}
Var(T_i) &= \frac{1}{(\lambda_i+\mu_i)^2} + \frac{\mu_i}{\lambda_i+\mu_i}\big(Var(T_{i-1})+Var(T_i)\big) + \frac{\lambda_i\mu_i}{(\lambda_i+\mu_i)^2}\big(E(T_{i-1})+E(T_i)\big)^2\\
&= \frac{1}{\lambda_i(\lambda_i+\mu_i)^2} + \frac{\mu_i}{\lambda_i}Var(T_{i-1}) + \frac{\lambda_i\mu_i}{(\lambda_i+\mu_i)^2}\big(E(T_{i-1})+E(T_i)\big)^2
\end{aligned}$$

Exercícios domésticos. Exercicios para Lista: 2,3,4.

1. Considere um Processo de Poisson com parametro λ e $X(t)$ denotando o número de ocorrências no intervalo $(0, t]$.
   (a) Encontre a probabilidade condicional de que hajam m ocorrências nas primeiras s unidades de tempo, dado que houveram n ocorrências nas primeiras t unidades de tempo, onde $0 \leq m \leq n$ e $0 \leq s \leq t$.
   (b) Seja T_m o tempo até a m-ésima ocorrência. Encontre a distribuição de probabilidade de T_m.
   Dica: $\{T_m \leq t\} = \{X(t) \geq m\}$.
   (c) Encontre a densidade da variávela aleatória T_m.
   Dica: Considere inicialmente casos específicos, por exemplo $m = 1, 2, 3$.

2. Seja T uma variável aleatória que é independente dos tempos em que ocorrem os eventos. Suponha que T tenha densidade exponencial com parâmetro v:

$$f_T(t) = ve^{-vt}, t > 0; f_t(t) = 0, t \leq 0.$$

   Encontre a distribuição de $X(T)$, que representa o número de eventos que ocorrem no tempo T. *Dica:* Use as equações:

$$P(X(t) = n) = \int_0^\infty F_T(t) P(X(t) = n | T = t) dt$$

   e:

$$P(X(t) = n | T = t) = P(X(t) = n).$$

3. Considere $X(t)$ um processo de nascimento puro da seguinte forma: T é uma variável aleatória exponencial (independente do processo) com a taxa λ. A cada ocorrência de T, população gera só um novo indivíduo.
   (a) o processo descrito é o processo de nascimento e morte? em caso "sim"calcule λ_n e μ_n.
   (b) Supomos que no momento $t = 0$, existem m indivíduos: $X(0) = m > 0$. Prove que $\lim_{t\to\infty} X(t) = \infty$.

4. Considere $X(t)$ um processo de nascimento puro da seguinte forma: T é uma variável aleatória exponencial (independente do processo) com a taxa λ. A cada ocorrência de T, cada indivíduo gera independentemente um novo indivíduo com probabilidade p (ou não gera com probabilidade $1 - p$).
   (a) Calcule $\{v_i\}$ e probabilidades de transição $\{p_{ij}\}$ para esse processo.
   (b) O processo é o processo de nascimento e morte pela definição da aula? caso "sim", calcule λ_n, μ_n.
   (c) O que dizer de $\lim_{t\to\infty} X(t)$?
   (d) Quando é que o processo definido nesse exercício é igual o processo do exercício anterior?

Referências

[1] S.M.Ross (1997) *Introduction to probability models.* Chapter 6.