Lista 8. Cadeias de Markov II (tempo discreto). Gabarito.

Solução Exercício 2.

1.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_0=0,X_1=1,X_2=1) &= \mathbb{P}(X_2 \mid X_1=1,X_0=0)\mathbb{P}(X_1=1,X_0=0)\\ &= \mathbb{P}(X_2 \mid X_1=1)\mathbb{P}(X_1=1 \mid X_0=0)\mathbb{P}(X_0=0)\\ &= \mathbb{P}(X_0=0)p_{01}p_{11} = \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{16}.\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_2=1,X_1=1 \mid X_0=0) &= \mathbb{P}(X_2=1 \mid X_1=1,X_0=0)\mathbb{P}(X_1=1 \mid X_0=0)\\ &= \mathbb{P}(X_2=1 \mid X_1=1)\mathbb{P}(X_1=1 \mid X_0=0) = p_{11}p_{01}.\end{aligned}$$

3.

$$p_{01}^{(2)} = (P^2)_{01} = p_{00}p_{01}+p_{01}p_{11}+p_{02}p_{21} = \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}+0\cdot\frac{1}{4} = \frac{7}{16}$$

Solução Exercício 4.

1. Para cadeia $\mathbf{P}_1$: estados são $E=\{1,2,3\}$, estados são todos comunicáveis, assim tem um único classe: $\{1,2,3\}$;
2. Para cadeia $\mathbf{P}_2$: estados são $E=\{1,2,3,4\}$, estados são todos comunicáveis, assim tem um único classe: $\{1,2,3,4\}$;
3. Para cadeia $\mathbf{P}_3$: estados são $E=\{1,2,3,4,5\}$, estados formam seguintes classes: $\{1,3\}\cup\{2\}\cup\{4,5\}$;
4. Para cadeia $\mathbf{P}_4$: estados são $E=\{1,2,3,4,5\}$, estados formam seguintes classes: $\{1,2\}\cup\{3\}\cup\{4\}\cup\{5\}$.

Solução Exercício 10. A cadeia faz seguintes transições: para $X_n \in E=\{0,1,\ldots,a\}$

$X_n \to X_n+1$ com probabilidade $1-\frac{X_n}{a}$;

$X_n \to X_n-1$ com probabilidade $\frac{X_n}{a}$.

Assim, para qualquer $k\in E$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1=k) &= \mathbb{P}(X_0=k-1)p_{k-1,k}+\mathbb{P}(X_0=k+1)p_{k+1,k} = \binom{a}{k-1}\frac{1}{2^a}\left(1-\frac{k-1}{a}\right)+\binom{a}{k+1}\frac{1}{2^a}\frac{k+1}{a}\\ &= \frac{1}{2^a}\left(\frac{a!}{(k-1)!(a-k+1)!}\frac{a-k+1}{a}+\frac{a!}{(k+1)!(a-k-1)!}\frac{k+1}{a}\right)\\ &= \frac{1}{2^a}\left(\frac{(a-1)!}{(k-1)!(a-k)!}+\frac{(a-1)!}{k!(a-k-1)!}\right) = \frac{1}{2^a}\frac{(a-1)!}{(k-1)!(a-k-1)!}\left(\frac{1}{a-k}+\frac{1}{k}\right)\\ &= \frac{1}{2^a}\binom{a}{k}.\end{aligned}$$

O que significa que a distribuição de X_0 considerada é invariante.

Solução Exercício 13. A cadeia tem única classe, i.e. é irredutível e finita, e por isso ergodica. Pelo teorema ergodica a cadeia tem única distribuição estacionária. Encontramos distribuição como solução de sistema de equações

$$\left\{\begin{aligned}\pi_0 &= \pi_0 0.4+\pi_1 0.3+\pi_2 0.2\\ \pi_1 &= \pi_0 0.4+\pi_1 0.4+\pi_2 0.4\\ \pi_2 &= \pi_0 0.2+\pi_1 0.3+\pi_2 0.4\\ 1 &= \pi_0+\pi_1+\pi_2\end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned}0.6\pi_0 &= \pi_1 0.3+\pi_2 0.2\\ \pi_1 &= 0.4\\ 1 &= \pi_0+\pi_1+\pi_2\end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned}\pi_2 &= 3\pi_0-0.6\\ \pi_1 &= 0.4\\ 1 &= \pi_0+\pi_1+\pi_2\end{aligned}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{aligned}\pi_2 &= 3\pi_0-0.6\\ \pi_1 &= 0.4\\ \pi_0 &= 0.3\end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned}\pi_2 &= 0.3\\ \pi_1 &= 0.4\\ \pi_0 &= 0.3\end{aligned}\right.$$

Solução Exercício 15. Seja ξ número de ramificações de uma partícula.

a) Número médio dos filhos é $\mathbb{E}(\xi) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4} < 1$. A probabilidade de extinção neste caso é igual 1.

b) Número médio dos filhos é $\mathbb{E}(\xi) = 0 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{2} > 1$. A probabilidade de extinção neste caso é menor de que 1, e é raiz de equação
$$\pi_0 = \pi_0^0 \frac{1}{4} + \pi_0^2 \frac{3}{4} \quad \Leftrightarrow \quad 3\pi_0^2 - 4\pi_0 + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \pi_0 = \frac{1}{3}.$$

c) Número médio dos filhos é $\mathbb{E}(\xi) = 0 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{2} > 1$. A probabilidade de extinção neste caso é menor de que 1, e é raiz de equação
$$\pi_0 = \pi_0^0 \frac{1}{6} + \pi_0^1 \frac{1}{2} + \pi_0^3 \frac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad 2\pi_0^3 - 3\pi_0 + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad (\pi_0 = 1 \text{ é raiz }) \;\; (\pi_0 - 1)(2\pi_0^2 + 2\pi_0 - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \pi_0 = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}.$$

Solução Exercício 18. A Maria ganha uma aposta com probabilidade $p = 2/3$, assim $q = 1/3$ e $q/p = 1/2$. Total de pontos é $N = 5 + 10 = 15$. A probabilidade de Maria ganhar começando com 5 pontos é dada pela formula
$$P_5 = \frac{1 - (q/p)^5}{1 - (q/p)^{15}} = \frac{1 - (0.5)^5}{1 - (0.5)^{15}} \cong 0.97$$
A resposta é "não", as chances não se igualaram com essa distribuição de pontos iniciais.