Lista 8. Cadeias de Markov com tempo discreto II.

1. ([2], p.233) Seja X_n uma cadeia de Markov com espaço dos estados $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ e matriz de transição a um passo P. Determine quais são as classes de comunicação fechada, os estados absorventes e a classificação deles (reccorrentes ou transitórios) para cada um dos seguintes casos:

$$P = \begin{vmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/4 & 1/4 \end{vmatrix}, \qquad P = \begin{vmatrix} 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \end{vmatrix}.$$

2. ([2], p.234) *Modelo de difusão de Ehrenfest.* Suponha que se tenha um recipiente com uma membrana que o separa em compartimentos A e B. Inicialmente, há j moléculas no compartimento A e $a - j$ no compartimento B. Diz-se que ocorre uma *transição* sempre que uma molécula atravessa a membrana (tanto de A para B como de B para A). Seja X_n o número de moléculas no comportamento A após n transições. Em cada transição, X_n aumenta ou diminui em exatamente uma molécula. Suponha que a probabilidade de que uma molécula mude de compartimento seja proporcional ao número de moléculas no compartimento de onde saiu tal molécula. Monte um modelo de uma cadeia de Markov desse processo de difusão. A cedeia é reversível? Tenta achar a medida invariante.

3. (Crescimento populacional com catastrofes uniformes) Considere seguinte cadeia de Markov em estados $\mathbb{Z}_+ = \{0\} \cup \mathbb{N}$. Supomos que a cadeia esta em estado $i \in \mathbb{N}$, então com a probabilidade 1/2 a cadeia muda seu estado para $i+1$, e com a probabilidade 1/2 a cadeia escolha de forma uniforme um dos estados $\{0, \dots, i-1\}$. A cadeia é irredutível? Os estados da cadeia são recorrentes ou estados são transitórios? Explique (sem provar). A cadeia é reversível? Achar a medida invariante.

4. Seja uma cadeia de Markov tendo como espaço de estados o conjunto $\{0, 1, 2\}$, e matriz de transição:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1-p & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   (a) Calcule P^2.

   (b) Mostre que $P^2 = P^4$.

   (c) Calcule P^n para todo $n \geq 1$.

5. Seja X_n um processo de ramificação. Supomos que $X_0 = l$. Qual é a média e a variância de X_n para este processo?

6. Consideramos um passeio aleatório simples e simétrico no intervalo $[0, M]$, onde os pontos 0 e M são pontos absorventes. O passeio começa no ponto $k_0 \in [0, M]$. Qual é a probabilidade de que o passeio pare no estado 0?

7. Considere a Cadeia de Markov com espaço de estados $\{0, 1, 2\}$ e matriz de transição:

$$\begin{pmatrix} 0.4 & 0.4 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{pmatrix}$$

   Mostre que essa cadeia tem uma única distribuição estacionária π e encontre π.

Referências

[1] S.M.Ross (1997) *Introduction to probability models.* Chapter 4.4.

[2] A.B.Clarke, R.L.Disney (1979) *Probabilidade e processos estocásticos.* Capítulo 8.