

Lista 8. Cadeias de Markov com tempo discreto II.

Para a matéria achei mais um recurso no internet

<http://www.portalaction.com.br/processo-estocastico/52-classificacao-de-estados-em-uma-cadeia-de-markov>

que segue a mesma lógica de raciocínio das nossas aulas, [1].

1. ([2], p.233) Seja X_n uma cadeia de Markov com espaço dos estados $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ e matriz de transição a um passo P . Determine quais são as classes de comunicação fechada, os estados absorventes e a classificação deles (recorrentes ou transitórios) para cada um dos seguintes casos:

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

O que você pode dizer sobre a medida invariante em ambos os casos: a medida invariante existe? se existe é a única?

2. Considere seguinte matriz de transição

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Dar a classificação de estados, quais são as classes de comunicação. Comente sobre a medida invariante. Ela existe? Se ela existe, encontre-a. Essa medida é única?

3. (Crescimento populacional com catastrofes uniformes) Considere seguinte cadeia de Markov em estados $\mathbb{Z}_+ = \{0\} \cup \mathbb{N}$ que tenta modela dinâmica de uma população muito particular. Supomos que a cadeia esta em estado $i \in \mathbb{N}$, então com a probabilidade $1/2$ a cadeia muda seu estado para $i + 1$, e com a probabilidade $1/2$ a cadeia escolha de forma uniforme um dos estados $\{0, \dots, i - 1\}$. Os estados da cadeia são recorrentes ou estados são transitórios? Explique (sem provar). Achar a medida invariante.
4. Consideramos um passeio aleatório simples e simétrico no intervalo $[0, M]$, onde os pontos 0 e M são pontos absorventes. O passeio começa no ponto $k_0 \in [0, M]$. Qual é a probabilidade de que o passeio pare no estado 0 ?
5. Considere a Cadeia de Markov com espaço de estados $\{0, 1, 2\}$ e matriz de transição:

$$\begin{pmatrix} 0.4 & 0.4 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{pmatrix}$$

Mostre que essa cadeia tem uma única distribuição estacionária π e encontre π .

Referências

- [1] S.M.Ross (1997) *Introduction to probability models*. Chapter 4.4.
- [2] A.B.Clarke, R.L.Disney (1979) *Probabilidade e processos estocásticos*. Capítulo 8.