Lista 7. Cadeias de Markov I (tempo discreto). Gabarito.

Solução Exercício 3. Pela indução. Seja fórmula para P^n é certa. Provamos que para P^{n+1} é certa também: tem que provar que

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(2p-1)^n & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}(2p-1)^n \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}(2p-1)^n & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(2p-1)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(2p-1)^{n+1} & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}(2p-1)^{n+1} \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}(2p-1)^{n+1} & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(2p-1)^{n+1} \end{pmatrix}$$

Realmente

$$\begin{aligned} p\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(2p-1)^n\right)+(1-p)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(2p-1)^n\right) &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(2p-1)^n\,(p-(1-p)) \\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(2p-1)^{n+1} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (1-p)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(2p-1)^n\right)+p\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(2p-1)^n\right) &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(2p-1)^n\,((1-p)-p) \\ &= \frac{1}{2}-\frac{1}{2}(2p-1)^{n+1} \end{aligned}$$

O que termina a prova. □

Solução Exercício 5. O fato que η_n é uma cadeia de Markov basta mostrar que η_{n+1} é uma função de η_n e uma variável aleatória independente, ou seja, $\eta_{n+1} = F(\eta_n, \xi_{n+1})$ em que ξ_i são i.i.d. e η_i, ξ_{i+1} são independentes para quaisquer i.

(a) A equação $\eta_{n+1} = \eta_n + \xi_{n+1}$ prova que η_n forma uma cadeia de Markov com seguinte matriz de transição $P = (p_{ij})$, em que

$$p_{ij} = \begin{cases} p & \text{se } j = i+1 \\ 1-p & \text{se } j = i-1 \end{cases} \qquad i \in \mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}.$$

(b) A equação $\eta_{n+1} = \max(\eta_n, \xi_{n+1})$ prova que η_n forma uma cadeia de Markov com seguinte matriz de transição $P = (p_{ij}), i, j = \pm 1$, em que

$$p_{-1,-1} = 1-p, \quad p_{-1,1} = p, \quad p_{1,-1} = 0, \quad p_{1,1} = p$$

(c) A equação $\eta_{n+1} = \eta_n \cdot \xi_{n+1})$ prova que η_n forma uma cadeia de Markov com seguinte matriz de transição $P = (p_{ij}), i, j = \pm 1$, em que

$$p_{-1,-1} = p, \quad p_{-1,1} = 1-p, \quad p_{1,-1} = 1-p, \quad p_{1,1} = p$$

□

Solução Exercício 6. Seja d fixo. A configuração de bolas em duas caixas é determinada sabendo número de bolas pretas em primeira caixa. Assim, o conjunto de possíveis configurações é equivalente o conjunto $E = \{0, 1, \dots, d\}$ – possíveis números de bolas pretas em primeira caixa. Assim, se $k \neq 0, d$

$$\begin{aligned} k \to k &\qquad 2\cdot\frac{k}{d}\cdot\frac{d-k}{d} \\ k \to k+1 &\qquad \left(\frac{d-k}{d}\right)^2 \\ k \to k-1 &\qquad \left(\frac{k}{d}\right)^2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} 0 \to 1 &\qquad \text{com probabilidade } 1 \\ d \to d-1 &\qquad \text{com probabilidade } 1 \end{aligned}$$

□

Solução Exercício 7. Estados dessa cadeia pode ser o conjunto de quartos. Aqui supomos que o quarto de Alfredinho é estado absorvente. Mas conjunto de estados pode ser reduzido: "0" – não é o quarto de Alfredinho, "1" – quarto de Alfredinho. Nestes condições o passeio de Alfredinho é cadeia de Markov com seguinte matriz de transição

$$0 \to 0 \text{ com probabilidade } 5/6$$
$$0 \to 1 \text{ com probabilidade } 1/6$$
$$1 \to 0 \text{ com probabilidade } 0$$
$$1 \to 1 \text{ com probabilidade } 1$$

Por isso a probabilidade de "visitar" 10 quartos antes de entrar no seu quarto é

$$\left(\frac{5}{6}\right)^{10} \frac{1}{6}.$$

□

Solução Exercício 8. Os estados desse "passeio" pode ser representado em um dos jeitos:

(1) "1" – o quarto de amigo é par; "0" – quarto par que não é quarto de amigo; "2" – quarto impar

(2) "1" – o quarto de amigo é impar; "0" – quarto impar que não é quarto de amigo; "2" – quarto par

A matriz de transição é a mesma para dois:

$$0 \to 0 \text{ com probabilidade } 0$$
$$0 \to 1 \text{ com probabilidade } 0$$
$$0 \to 2 \text{ com probabilidade } 1$$
$$1 \to 0 \text{ com probabilidade } 0$$
$$1 \to 1 \text{ com probabilidade } 1$$
$$1 \to 2 \text{ com probabilidade } 0$$
$$2 \to 0 \text{ com probabilidade } 2/3$$
$$2 \to 1 \text{ com probabilidade } 1/3$$
$$2 \to 2 \text{ com probabilidade } 0$$

□