Lista 7. Cadeias de Markov com tempo discreto I.

1. A matriz de transição de uma cadeia de Markov é dada pela seguinte matriz

$$P = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}.$$

   A distribuição de estado inicial È definido pelo vetor $\pi_0^T = (0.1, 0.9)$. Achar:

   (a) matriz de transição para dois passos da cadeia;

   (b) distribuição de estado em instante $t = 2$;

   (c) a probabilidade de que em instante $t = 1$ estar em estado 2;

2. Seja ξ_n o estado de cadeia de Markov em instante n com matriz de transição

$$P = \begin{pmatrix} 3/7 & 3/7 & 1/7 \\ 1/11 & 2/11 & 8/11 \\ 1/11 & 4/11 & 6/11 \end{pmatrix},$$

   com estado inicial $P(\xi_0 = 1) = 1$. Consideramos seguinte sequencia

$$\eta_n = \begin{cases} 1, & \text{se } \xi_n = 1 \\ 2 & \text{se } \xi_n \neq 1 \end{cases}$$

   Sabe-se que a sequencia $(\eta_n)_{n=0,1,\dots}$ forma uma cadeia de Markov. Construa a matriz de transição dela.

3. Seja $\xi_n, n \geq 0$, uma sequencia de variáveis aleatórias com valores 1 e -1 com respectivas probabilidades p e $q := 1 - p$. Sebe-se que a sequencia

$$\eta_n = \varphi(\xi_n, \xi_{n+1}),\ n \geq 0,$$

   forma uma cadeia de Markov, em que

$$\varphi(-1,-1) = 1, \varphi(-1,1) = 2, \varphi(1,-1) = 3, \varphi(1,1) = 4.$$

   Construa matriz de transição para essa cadeia.

4. Um funcionário de controle recebe cada minuto uma peça, que pode ser defeituosa com probabilidade p e padrão com probabilidade $1 - p$, em que $p \in (0, 1)$. Cada peça o controlador verifica, gastando um minuto para verificação. Se a peça é defeituosa o controlador arruma a peça gastando 5 minutos. Seja ξ_n número de peças que estão aguardando o controlador depois de n minutos depois de inicio de trabalho. A sequencia ξ_n forma uma cadeia de Markov?