Lista 7. Cadeias de Markov com tempo discreto I.

1. Considere seguinte exemplo de exame da Sociedade de Atuarias:

A machine is in one of four states (F, G, H, I) and migrates annually among them according to a discrete-time Markov process with transition probability matrix:

	F	G	H	I
F	0.20	0.80	0.00	0.00
G	0.50	0.00	0.50	0.00
H	0.75	0.00	0.00	0.25
I	1.00	0.00	0.00	0.00

At time 0, the machine is in State F. A salvage company will pay 500 at the end of 3 years if the machine is in State F.

Assuming $v = 0.90$, calculate the actuarial present value at time 0 of this payment.

(A) 150

(B) 155

(C) 160

(D) 165

(E) 170

Para resolver essa questão você tem que

(a) Achar a probabilidade de maquina estar em estado "F" depois de três anos.

(b) Depois disso, caso você saiba o que é *actuarial present value*, calcule-o.

2. As probabilidades de transição anual entre os estados de saude de pessoas estão resumidas em seguinte matriz:

	Healthy	Sick	Terminated
Healthy	0.7	0.1	0.2
Sick	0.3	0.6	0.1
Terminated	0.0	0.0	1.0

A cada ano o segurado paga o prêmio bruto de 800.

(a) Achar a média de prêmio pago durante três anos pelo um segurado saudável.

(b) Supomos que cada ano o estado gasta em média para sistema de saude para cada individuo 500, se ele é saudável, 3000 caso ele doente e nada caso contrário. Achar a média de gastos de estado por um individuo durante 3 anos.

3. Resolve seguinte exemplo de exame da Sociedade de Atuarias:

A certain species of flower has three states: sustainable, endangered and extinct. Transitions between states are modeled as a non-homogeneous discrete-time Markov chain with transition probability matrices Q_i as follows, where Q_i denotes the matrix from time i to i+1.

$$Q_0 = \begin{array}{r} \\ \text{Sustainable} \\ \text{Endangered} \\ \text{Extinct} \end{array} \begin{array}{ccc} \text{Sustainable} & \text{Endangered} & \text{Extinct} \\ \left(\begin{array}{c} 0.85 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right. & \begin{array}{c} 0.15 \\ 0.7 \\ 0 \end{array} & \left.\begin{array}{c} 0 \\ 0.3 \\ 1 \end{array}\right) \end{array}$$

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 0.95 & 0.05 & 0 \\ 0.2 & 0.7 & 0.1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q_i = \begin{pmatrix} 0.95 & 0.05 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i = 3, 4, \ldots$$

Calculate the probability that a species endangered at time 0 will ever become extinct.

(A) 0.45

(B) 0.47

(C) 0.49

(D) 0.51

(E) 0.53

4. Seja ξ_n o estado de cadeia de Markov em instante n com matriz de transição

$$P = \begin{pmatrix} 3/7 & 3/7 & 1/7 \\ 1/11 & 2/11 & 8/11 \\ 1/11 & 4/11 & 6/11 \end{pmatrix},$$

com estado inicial $P(\xi_0 = 1) = 1$. Consideramos seguinte sequencia

$$\eta_n = \begin{cases} 1, & \text{se } \xi_n = 1 \\ 2 & \text{se } \xi_n \neq 1 \end{cases}$$

Sabe-se que a sequencia $(\eta_n)_{n=0,1,\ldots}$ forma uma cadeia de Markov. Construa a matriz de transição dela.