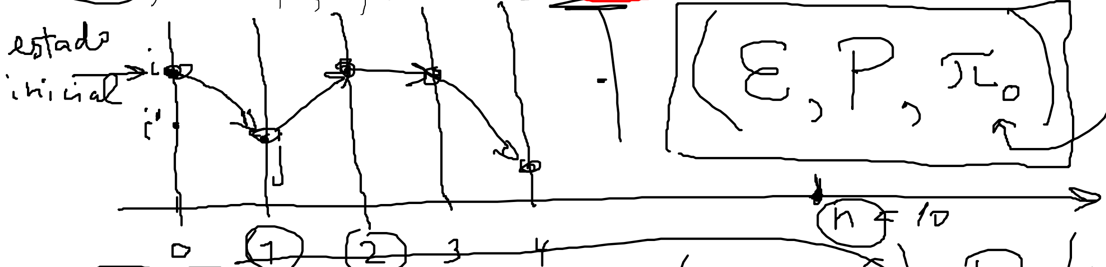
Aula 7. Cadeias de Markov com tempo discreto I.

1. Considere sequencia de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas $X_i, i = 0, 1, 2, \dots$. Supomos que a distribuição deles é Bernoulli $X_i \sim B(p)$. Falaram que essa sequencia pode ser considerada como uma cadeia de Markov, será que isso é verdade? e se caso verdade, descreve a cadeia, oferencendo: (i) conjunto de estados da cadeia; (ii) matriz de transição; e (iii) estado (distribuição) inicial.

(X_n) $n=0,1,2,\dots$ $\quad X_n$, iid, $\quad X_n \in \underbrace{\mathcal{E}=\{a_1, a_2, \dots\}}$ finito contavel



$\boxed{(\mathcal{E}, P, \pi_0)}$ distr. de estado inicial

$(p_{ij})_{j\in\mathcal{E}}$ — transição $(p_{jk}\ k\in\mathcal{E})$

$(p_{i'j})_{j\in\mathcal{E}}$

$$P=(p_{ij})=\begin{matrix} p_{11} & p_{12} & \dots \\ p_{21} & p_{22} & \dots \\ \vdots & & \end{matrix}$$

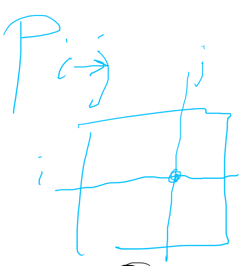
$n \to n+1$ $\quad p_{ij} = P(X_{n+1}=j \mid X_n = i) = P(X_{n+1}=j)$

X_i	0	1
P	$1-p$	p

$\mathcal{E}=\{0,1\}$, $\quad p_{10}=P(X_{n+1}=0 \mid X_n$ $\quad X_0 \sim B(p)$

$p_{ij} = P(X_{n+1}=j)$ $\quad j = 0, 1$

$P_{i\to j}$



$$P=\begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ 1-p & p \end{pmatrix}$$

inicia $\quad \pi_0 = \begin{pmatrix} 1-p \\ p \end{pmatrix}$

$$\boxed{\pi_n^T P = \pi_{n+1}^T} \qquad (1\times n)\times(n \times n) = (1 \times n)$$

$$\pi_0^T P = \pi_1^T$$

$$(1-p, p)\begin{pmatrix} 1-p & p \\ 1-p & p \end{pmatrix} = \Big(\overbrace{(1-p)(1-p)+(1-p)p}^{1-p}, \ p\Big)$$

$$(1-p)(\underbrace{1-p+p}_{1})$$

$(1-p, p)$ $\leftarrow$ invariante estacionária

2. Imagine seguinte experimento. Temos duas urnas, verde (com 4 bolas verdes e 1 amarela) e amarela (com 2 bolas amarelas e 1 verde). Experimento consiste em retirada sequencial de bolas de urnas com reposição seguindo seguinte regras:

   (a) para começar retiramos bola da urna verde e registramos o cor dela, denotamos X_0; supomos que isso seja retirada com número 0;

   (b) seja X_i é cor registrada depois da i-gésima retirada, então, para registrar a próxima X_{i+1} cor seguimos:

      i. se $X_i =$ *verde*, então X_{i+1} é cor da bola retirada da urna verde;

      ii. se $X_i =$ *amarelo*, então X_{i+1} é cor da bola retirada da urna amarela.

   Descreve a cadeia, oferencendo: (i) conjunto de estados da cadeia; (ii) matriz de transição; e (iii) estado (distribuição) inicial.

$X_0 = \{$"verde", "amarelo"$\}$

V A

$P(X_0 = V) = \frac{4}{5}$

X_0	V	A
	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$

$\mathcal{E} = \{$"V", "A"$\}$,

$\pi_0 = \begin{pmatrix} 4/5 \\ 1/5 \end{pmatrix}$

$$P = \begin{pmatrix} p_{VV} & p_{VA} \\ p_{AV} & p_{AA} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$P(X_i = V \to X_{i+1} = V) =$

3. A matriz de transição de uma cadeia de Markov com dois estados 1 e 2 é dada pela seguinte matriz

$$P = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}.$$

(P, π_0) (P, π_0)

A distribuição de estado inicial é definido pelo vetor-linha $\pi_0^T = (0.1, 0.9)$. Achar:

(a) matriz de transição para dois passos da cadeia;

(b) distribuição de estados em instante $t = 2$;

(c) a probabilidade de que em instante $t = 1$ estar em estado 2;

a)

$$P(X_{n+k} = j \mid X_n = i) = (P^K)_{ij}$$

$$p_{ij} = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$$

$$P(X_{n+2} = j \mid X_n = i) = (P^2)_{ij}$$

$$\begin{pmatrix} 0.34 & 0.66 \\ 0.33 & 0.67 \end{pmatrix} = P^2$$

$$\begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4^2 + 0.6 \cdot 0.3 & 0.4 \cdot 0.6 + 0.6 \cdot 0.7 \\ 0.3 \cdot 0.4 + 0.7 \cdot 0.3 & 0.3 \cdot 0.6 + 0.7^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ldots \end{pmatrix}$$

b)

$$\pi_0^T P = \pi_1^T$$

$$\boxed{\pi_0^T P^2 = \pi_2^T}$$

$$\pi_0^T P P = \pi_1^T P = \pi_2^T$$

$$(0.1, 0.9)\begin{pmatrix} 0.34 & 0.66 \\ 0.33 & 0.67 \end{pmatrix} = (0.1 \cdot 0.34 + 0.9 \cdot 0.33, \; 0.1 \cdot 0.66 + 0.9 \cdot 0.67)$$

$$\pi_0^T P^K = \pi_K^T$$

c)

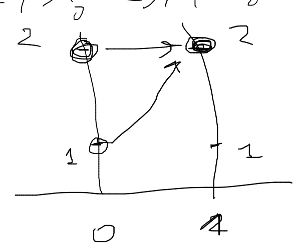
$$P(X_1 = 2) \qquad \pi_1$$

$$\pi_0^T P = \pi_1 \qquad (0.1, 0.9)\begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} = (0.1 \cdot 0.4 + 0.9 \cdot 0.3, \; 0.1 \cdot 0.6 + 0.9 \cdot 0.7)$$

$$P(X_1 = 2) = P(X_1 = 2, X_0 = 1) + P(X_1 = 2, X_0 = 2) =$$

$$= P(X_1 = 2 \mid X_0 = 1) P(X_0 = 1) + P(X_1 = 2 \mid X_0 = 2) P(X_0 = 2)$$

$$= \underset{0.6}{p_{12}} \, 0.1 + \underset{0.7}{p_{22}} \, 0.9$$



4. Supondo o modelo fora de realidade: depois de fazer seguro de vida um individuo tem a probabilidade de 90% estar vivo no próximo ano.

   (a) Representa o modelo como uma cadeia de Markov, oferencendo: (i) conjunto de estados da cadeia; (ii) matriz de transição; e (iii) estado (distribuição) inicial.

   (b) Supondo que cada ano individuo paga mil reais de seguro-vida. Achar a média e a variância de montante que a seguradora ganha desse indivíduo.

   (c) Supondo que em caso da morte a seguradora vai pagar 10 mil reais; achar a média de ganho da seguradora durante a vida desse individuo.

   (d) Supondo a validade desse modelo para cada individuo, construa a cadeia de Markov que descreve a vida de um casal oferencendo: (i) conjunto de estados da cadeia; (ii) matriz de transição; e (iii) estado (distribuição) inicial.

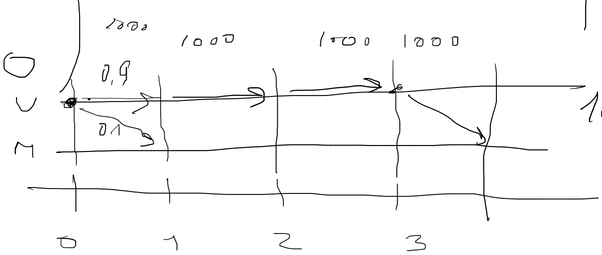
a) $\mathcal{E} = \{ "V", "M" \}$

$$P = \begin{pmatrix} P_{VV} & P_{VM} \\ P_{MV} & P_{MM} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Pi_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

T Tempo de vida / sobrevid

b) 1000



$1000 \cdot T$

$E(T) = \frac{1-p}{p}$ $\quad Var(T) = \frac{1-p}{p^2}$

$P(T=4) = 0.9^3\, 0.1$ $\quad T \sim$ geometrica (0.1)

$P(T=k) = 0.9^{k-1} \cdot 0.1$ $\quad k = 1, 2, 3, \dots$

$0.9^2 + 2\, 0.9\, 0.1 + 0.1^2 = (0.1 + 0.9)^2$

$1000\, \sqrt{10}\, \sqrt{\frac{9}{10}} =$

$= 1000 \cdot \sqrt{10} \cdot 3$

$= 3000 \sqrt{10}$

$X = 1000\, T$

$E(X) = 1000\, ET = 1000 \frac{0.9}{0.1} = 9000$

$Var(X) = 1000^2\, Var\, T = 1000^2 \frac{0.9}{0.1^2}$ $\quad sd(X) = \sqrt{Var(T)} = 1000 \frac{\sqrt{0.9}}{0.1} =$

$= 10.000 \frac{3}{\sqrt{10}} = 3000\sqrt{10} \simeq$

9000

c) $-10.000 + 9000 = -1.000$

d) $\mathcal{E} = \{ \underset{0}{VV}, \underset{1}{VM}, \underset{2}{MV}, \underset{3}{MM} \}$

$$\begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0.9^2 & 0.9 \cdot 0.1 & 0.1 \cdot 0.9 & 0.1^2 \\ 1 & 0 & 0.9 & 0 & 0.1 \\ 2 & 0 & 0 & 0.9 & 0.1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$