Aula 7. Cadeias de Markov: motivação e introdução.

Anatoli Iambartsev
IME-USP

Aula 7. Cadeias de Markov: motivação e introdução

Video 1. Assiste como introdução histórica

https://www.youtube.com/watch?v=KZfItpSXseo

Video 2. Como introdução pode ser

https://www.youtube.com/watch?v=LUbQcRXLQcE

com o inicio 3 min 37s até 36 min 39s.

Video 3. Finalizando com exemplos de cadeias aplicadas à Atuária

https://www.youtube.com/watch?v=cVXagizHjxQ

Exercício 1.

1. Considere sequencia de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas $X_i, i = 0, 1, 2, \ldots$. Supomos que a distribuição deles é Bernoulli $X_i \sim B(p)$. Falaram que essa sequencia pode ser considerada como uma cadeia de Markov, será que isso é verdade? e se caso verdade, descreve a cadeia, oferencendo: (i) conjunto de estados da cadeia; (ii) matriz de transição; e (iii) estado (distribuição) inicial.

Exercício 2.

2. Imagine seguinte experimento. Temos duas urnas, verde (com 4 bolas verdes e 1 amarela) e amarela (com 2 bolas amarelas e 1 verde). Experimento consiste em retirada sequencial de bolas de urnas com reposição seguindo seguinte regras:

1. para começar retiramos bola da urna verde e registramos o cor dela, denotamos X_0; supomos que isso seja retirada com número 0;

2. seja X_i é cor registrada depois da i-gésima retirada, então, para registrar a próxima X_{i+1} cor seguimos:

   (a) se $X_i = verde$, então X_{i+1} é cor da bola retirada da urna verde;

   (b) se $X_i = amarelo$, então X_{i+1} é cor da bola retirada da urna amarela.

Descreve a cadeia, oferencendo: (i) conjunto de estados da cadeia; (ii) matriz de transição; e (iii) estado (distribuição) inicial.

Exercício 3.

3. A matriz de transição de uma cadeia de Markov com dois estados 1 e 2 é dada pela seguinte matriz

$$P = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}.$$

A distribuição de estado inicial é definido pelo vetor-linha $\pi_0^T = (0.1, 0.9)$. Achar:

1. matriz de transição para dois passos da cadeia;

2. distribuição de estados em instante $t = 2$;

3. a probabilidade de que em instante $t = 1$ estar em estado 2;

Exercício 4. Veja exemplo de Video 3.

4. Supondo o modelo fora de realidade: depois de fazer seguro de vida um individuo tem a probabilidade de 90% estar vivo no próximo ano.

1. Representa o modelo como uma cadeia de Markov, oferencendo: (i) conjunto de estados da cadeia; (ii) matriz de transição; e (iii) estado (distribuição) inicial.

2. Supondo que cada ano individuo paga mil reais de seguro-vida. Achar a média e a variância de montante que a seguradora ganha desse indivíduo.

3. Supondo que em caso da morte a seguradora vai pagar 10 mil reais; achar a média de ganho da seguradora durante a vida desse individuo.

4. Supondo a validade desse modelo para cada individuo, construa a cadeia de Markov que descreve a vida de um casal oferencendo: (i) conjunto de estados da cadeia; (ii) matriz de transição; e (iii) estado (distribuição) inicial.