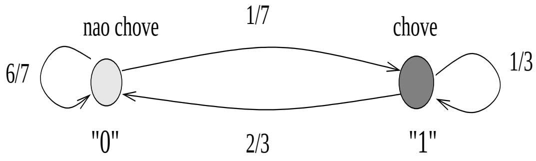

Figura 1: *Todas as transições com suas respectivas probabilidades representadas através de um grafo. Notem que para cada estado, a soma das probabilidades das flechas de saída deste estado é igual a 1.*

Aula 7. Cadeias de Markov.

Numa ilha desconhecida o tempo durante o dia é de dois tipos: ou está chovendo, ou não está chovendo. Os indígenas desta ilha dizem que se hoje chove, então com as chances 2 vs 1 não vai chover amanhã, mas se hoje não chove, então com as chances 6 vs 1 não vai chover amanhã. Para modelar esse sistema, podemos usar a técnica de cadeias de Markov. Uma cadeia de Markov constrói-se em dois passos. No primeiro passo, definimos os estados do sistema. Neste caso o nosso interesse é o tempo, que pode ficar em dois estados "chove"(vamos codificar este estado como 1) e "não chove"(vamos codificar este estado como 0).

$$\text{Estados } = \{\text{não chove, chove}\} = \{0, 1\}.$$

No segundo passo, temos que descrever TODAS as transições entre os estados. Neste caso, temos 4 possíveis transições:

$$0 \to 1,\ 0 \to 0,\ 1 \to 0,\ 1 \to 1.$$

Além disso, para cada transição, temos sua respectiva probabilidade. Em nosso caso, as probabilidades são

- $0 \to 1$ – se hoje não chove, então amanhã não vai chover com chances 6 vs 1, ou com probabilidade $p_{01} = 1/7$ vai chover;
- $0 \to 0$ – se hoje não chove, amanhã não vai chover com probabilidade $p_{00} = 6/7$;
- $1 \to 0$ – hoje chove, amanhã não chove, isso acontece com as chances 2 vs 1 ou com probabilidade $p_{10} = 2/3$;
- $1 \to 1$ – ocorre com probabilidade $p_{11} = 1/3$.

As transições podem ser representadas através do diagrama de transições; veja a figura (2).

Notamos que

$$p_{00} + p_{01} = 1 \text{ e } p_{10} + p_{11} = 1.$$

Isso reflete o fato que se o tempo hoje é 'a', amanhã vai ser ou 0 ou 1: $p_{a0} + p_{a1} = 1,\ a = \{0, 1\}$.

Teoria geral (informal)

Vamos considerar o processo estocástico $\{X_n,\ n = 0, 1, 2, \ldots\}$ em tempo discreto. As variáveis aleatórias X_n assumem valores no mesmo conjunto E que pode ser finito ou enumerável. Este conjunto chama-se o conjunto de estados e pode ser representado como o conjunto de números não-negativos $E = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Quando $X_n = i$, dizemos que o processo está no estado i em tempo n. Suponha que para cada estado i, existem as probabilidades fixas p_{ij} de que o processo esteja no estado i e no próximo passo esteja no estado j :

$$P\{X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_1 = i_1, X_0 = i_0\} = P\{X_{n+1} = j \mid X_n = i\} = p_{ij}. \tag{1}$$

Isto significa que as chances de estar no estado j no instante $n+1$, depende somente do estado no instante n, mas não depende da toda história do processo $(X_0, X_1, \ldots, X_{n-1})$. Essa propriedade do processo chama-se propriedade de Markov, ou propriedade markoviana. Notamos que as probabilidades não dependem do tempo n,; estes tipos de cadeias de Markov chamam-se cadeias homogêneos com relação ao tempo. As probabilidades podem ser representadas através de uma matriz e de propriedades de p_{ij} que automaticamente seguem de (1). Com isso, temos que

$$\mathbf{P} = \begin{vmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ p_{i0} & p_{i1} & p_{i2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} \quad \text{para quaisquer } i, j \geq 0 \ \ p_{ij} \geq 0, \ \text{para qualquer } i \ \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} = 1. \tag{2}$$

A matriz (6) chama-se a matriz de probabilidades de transição para um passo.

Ex. 1. Para a cadeia com transições dadas pela Figura 2, construa a matriz (6).

Solução.

$$\mathbf{P} = \begin{vmatrix} 6/7 & 1/7 \\ 2/3 & 1/3 \end{vmatrix}$$

□

Equações de Kolmogorov - Chapman

Definimos as probabilidades de transição a n passo. A probabilidade $p_{ij}^{(n)}$ chama-se a probabilidade de transição de i para j depois de n passos e é dada por

$$p_{ij}^{(n)} = P\{X_{n+m} = j \mid X_m = i\}, n \geq 0, i, j \geq 0 \tag{3}$$

Evidentemente $p^{(1)} = p_{ij}$. As *equações de Kolmogorov - Chapman* fornecem o cálculo de probabilidades de transição em n-passos. Eles são

$$p_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)} \text{ para todos } n, m \geq 0, \text{ e todos } i, j. \tag{4}$$

Formalmente, isso pode ser mostrado do seguinte modo:

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(n+m)} &= P\{X_{n+m} = j \mid X_0 = i\} = \sum_{k=0}^{\infty} P\{X_{n+m} = j, X_n = k \mid X_0 = 0\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P\{X_{n+m} = j \mid X_n = k, X_0 = 0\} P\{X_n = k \mid X_0 = i\} = \sum_{k=0}^{\infty} p_{kj}^{(m)} p_{ik}^{(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)}. \end{aligned}$$

Seja $\mathbf{P}^{(n)}$ a matriz de probabilidades de transição em n passos. A equação (4) pode ser representada através de matrizes como

$$\mathbf{P}^{(n+m)} = \mathbf{P}^{(n)} \mathbf{P}^{(m)}.$$

Particularmente, para dois passos, temos

$$\mathbf{P}^{(2)} = \mathbf{P}^{(1)} \mathbf{P}^{(1)} = \mathbf{P}\mathbf{P} = \mathbf{P}^2 \Rightarrow \text{ por indução } \Rightarrow \mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^n.$$

Ex. 2. Para a matriz de transições do exercício anterior, calcule a matriz de transições para dois passos.

Solução. A matriz de transições a um passo é

$$\mathbf{P} = \begin{vmatrix} 6/7 & 1/7 \\ 2/3 & 1/3 \end{vmatrix}$$

Porém

$$\mathbf{P}^{(2)} = \mathbf{P}^2 = \begin{vmatrix} 6/7 & 1/7 \\ 2/3 & 1/3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 6/7 & 1/7 \\ 2/3 & 1/3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{6}{7}\frac{6}{7} + \frac{1}{7}\frac{2}{3} & \frac{6}{7}\frac{1}{7} + \frac{1}{7}\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3}\frac{6}{7} + \frac{1}{3}\frac{2}{3} & \frac{2}{3}\frac{1}{7} + \frac{1}{3}\frac{1}{3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 122/147 & 25/147 \\ 50/63 & 10/63 \end{vmatrix}.$$

Notamos que

$$\frac{122}{147} + \frac{25}{147} = 1 \qquad \frac{50}{63} + \frac{10}{63} = 1.$$

□

Ex. 3. Consideramos mais um exemplo de construção de cadeia de Markov. Suponha que o sistema S é composto por dois componentes A e B paralelos e independentes – isso significa que o sistema S não funciona quando os dois componentes A e B não funcionam. O sistema trabalha periodicamente com um periodo T. Sabe-se que a probabilidade de que o componente A (B) quebre durante cada período T de uso do sistema é igual à p_A (p_B). Seja X_n o estado do sistema S antes do uso no n-ésimo período. X_n pode ser representada como uma cadeia de Markov? Construa esta cadeia.

S. O jeito mais simples de construir a cadeia neste caso é usar os estados que refletem os estados de cada componente:

- 0 – os dois componentes funcionam;
- 1 – o componente A funciona, mas o componente B não;

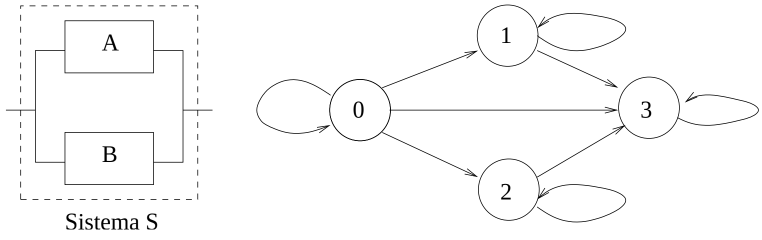

Figura 2: *O sistema e a representação gráfica das transições.*

- 2 – o componente B funciona, mas o componente A não;
- 3 – os dois componentes não funcionam.

Possíveis transições que garantem o período de funcionamento são:

- $0 \to 0$ – se no início do uso do sistema os dois componentes funcionaram, então durante o período T nenhum componente quebrou. A probabilidade desta transição é $(1-p_A)(1-p_B)$ – componente A **NÂO** quebrou $(1-p_A)$ **E** componente B **NÂO** quebrou $(1-p_B)$;
- $0 \to 1$ – se no início do uso do sistema os dois componentes funcionaram, então durante o período T, o componente A quebrou, mas o componente B não quebrou. A probabilidade desta transição é $p_A(1-p_B)$ – componente A quebrou p_A **E** componente B **NÂO** quebrou $(1-p_B)$;
- $0 \to 2$ – se no início do uso do sistema os dois componentes funcionaram, então, durante o período T, somente o componente B quebrou. A probabilidade desta transição é $(1-p_A)p_B$ – componente A **NÂO** quebrou $(1-p_A)$ **E** componente B quebrou p_B;
- $0 \to 3$ – se no início do uso do sistema os dois componentes funcionaram, então durante o período T, os dois componentes quebraram. A probabilidade desta transição é $p_A p_B$ – componente A quebrou p_A **E** componente B quebrou p_B;
- $1 \to 1$ – se no início do uso do sistema somente o componente A não funciona, então durante o período T, o componente B não quebrou. A probabilidade desta transição é $(1-p_B)$ – componente B **NÂO** quebrou;
- $1 \to 3$ – se no início do uso do sistema somente o componente A não funciona, então durante o período T, o componente B quebrou. A probabilidade desta transição é p_B – componente B quebrou durante o periodo T;
- $2 \to 2$ – se no início do uso do sistema somente o componente B não funciona, então durante o período T, o componente A não quebrou. A probabilidade desta transição é $(1-p_A)$ – componente A **NÂO** quebrou;
- $2 \to 3$ – se no início de uso do sistema somente o componente B não funciona, então durante o período T o componente A quebrou. A probabilidade desta transição é p_A – componente A quebrou durante o periodo T;
- $3 \to 3$ – se no início de uso o sistema não funciona, então durante o período T, o sistema não vai ressuscitar com probabilidade 1.

A matriz de probabilidades de transições a um passo é

$$\mathbf{P} = \begin{vmatrix} (1-p_A)(1-p_B) & p_A(1-p_B) & (1-p_A)p_B & p_A p_B \\ 0 & (1-p_B) & 0 & p_B \\ 0 & 0 & (1-p_A) & p_A \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \tag{5}$$

□

Para achar a distribuição de probabilidades de estados de uma cadeia de Markov, junto com as probabilidades de transições, que são na realidade as probabilidades condicionais, precisa-se saber as probabilidades não-condicionais do sistema estar em um estado em instante inicial $n = 0$ ou, em outras palavras, precisa-se saber a distribuição da variável X_0. Sejam

$$\alpha_i \equiv P\{X_0 = i\}, \quad i \geq 0 \text{ e } \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i = 1. \tag{6}$$

Todas as probabilidades não-condicionais podem ser calculadas condicionando pelo estado inicial:

$$P\{X_n = j\} = \sum_{i=0}^{\infty} P\{X_n = j \mid X_0 = i\} P\{X_0 = i\} = \sum_{i=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} \alpha_i. \tag{7}$$

Ex. 4. Para a matriz de transições

$$\mathbf{P} = \begin{vmatrix} 6/7 & 1/7 \\ 2/3 & 1/3 \end{vmatrix}$$

calcule a probabilidade de que $X_1 = 0$ sabendo que X_0 tem distribuição uniforme.

Solução. Sabe-se que $\alpha_0 = P\{X_0 = 0\} = \alpha_1 = P\{X_0 = 1\} = 1/2$ ou em forma vetorial $(\alpha_0, \alpha_1) = (1/2, 1/2)$. A distribuição depois de um passo, pela fórmula (7), é

$$\begin{aligned} \alpha\mathbf{P} = (\alpha_0, \alpha_1)\mathbf{P} &= (1/2, 1/2) \begin{vmatrix} 6/7 & 1/7 \\ 2/3 & 1/3 \end{vmatrix} \\ &= \Big(\frac{1}{2} \cdot \frac{6}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}, \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}\Big) = (16/21, 5/21). \end{aligned}$$

□

Exercícios domésticos. Exercicios para Lista: 3, 5, 6, 7, 8.

1. (Exemplo 4.2, [1]) Consideramos um sistema de communicação que transmite 0s e 1s. Cada dígito que entra no sistema passa por várias etapas de operação. Em cada etapa, o dígito pode alterar o seu valor com probabilidade $1 - p$ e manter o valor com probabilidade p. Seja X_n o valor do dígito na n-ésima etapa.
   (a) Prove que X_n é uma cadeia de Markov.
   (b) Encontre a matriz de transição.
   (c) Seja $X_0 = 0$ (com probabilidade 1). Encontre a probabilidade $P\{X_3 = 0\}$.
2. (Exercício 1, [1]) Três bolas brancas e três bolas pretas são distribuídas entre duas urnas tal que cada urna contém 3 bolas. Vamos descrever o sistema da seguinte maneira. O sistema está no estado i, $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ se a primeira urna contém i bolas brancas. Em cada instante discreto de tempo, retiramos aleatoriamente uma bola de cada urna e trocamos as bolas (a bola da primeira urna vai para segunda e vice-versa). Seja X_n o estado do sistema no n-ésimo passo (no instante n). Prove que X_n é uma cadeia de Markov e construa a matriz de transições.
3. (Exercício 5, [1]) A matriz de transições de uma cadeia de Markov com dois estados é dada pela seguinte fórmula:

   $$\mathbb{P} = \begin{vmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{vmatrix}.$$

   Usando indução, mostre que

   $$\mathbb{P}^{(n)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1)^n & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(2p-1)^n \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(2p-1)^n & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1)^n \end{vmatrix}.$$

4. (Exemplo 4.7, [1]) A matriz de transições de uma cadeia de Markov com dois estados 0 e 1 é dada pela seguinte fórmula:

   $$\mathbb{P} = \begin{vmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{vmatrix}$$

   (a) Ache $\mathbb{P}^{(4)}$.
   (b) Seja $P\{X_0 = 0\} = 0.3$. Ache $P\{X_4 = 1\}$.
5. Seja $\xi_0, \xi_1, \ldots$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas

   $$0 < p = P\{\xi_n = 1\} = 1 - P\{\xi_n = -1\} = 1 - q < 1.$$

   Consideramos as seguintes sequências de variáveis aleatórias:
   (a) $\eta_n = \xi_0 + \cdots + \xi_n$,
   (b) $\eta_n = \max(\xi_0, \ldots, \xi_n)$,
   (c) $\eta_n = \xi_0 \times \cdots \times \xi_n$.

   Prove que em todos os casos, η_n é uma cadeia de Markov. Para cada caso, encontre a matriz de transição.

6. Suponha que nós tenhamos duas caixas e $2d$ bolas, sendo d brancas e d pretas. Em cada caixa colocamos ao acaso d bolas. A cada etapa do nosso jogo, retiramos ao acaso uma bola de cada caixa e trocamos elas. Seja X_0 o número inicial de bolas pretas na primeira caixa, X_1 o número de bolas pretas após a primeira jogada, X_n o número de bolas pretas após a n-ésima jogada. Encontre a matriz de transição da Cadeia de Markov X_n.

7. Alfredinho sempre aprontava muito. Certa vez ele bebeu demais e não se lembrava em qual quarto estava dormindo, então seus amigos (que eram matemáticos) resolveram lhe pregar uma peça: Em cada um dos 6 quartos da casa(que eram numerados de 1 a 6), eles colocaram um dado. Quando Alfredinho entrava num quarto, ele lançava o dado e escolhia o próximo quarto para ir conforme a face que saía no dado. Sabendo que o quarto de Alfredinho é o de número 5 e que o primeiro quarto a entrar foi o quarto 1, calcule a probabilidade de Alfredinho visitar exatamente 10 quartos(que podem ser repetidos...) antes de finalmente poder dormir.

8. (A vingança de Alfredinho) Dessa vez, quem bebeu foram os amigos dele, e tinham de dormir. Alfredinho(que é muito vingativo), colocou entao um dado em cada um dos 6 quartos, mas agora a brincadeira era diferente: quando alguém chegava em uma casa ímpar, só podia ir para uma casa par (por exemplo, estou no quarto 3 e jogo o dado. Se cair 1,3 ou 5 eu jogo o dado de novo, até sair um número par e então vou para casa). Calcule a matriz de Transição desta Cadeia de Markov.

9. No exercício anterior, considere que de um quarto eu só posso ir para um quarto de número múltiplo dele. Por exemplo, se estou no quarto 2, só posso ir para o 2, 4 ou 6. Se sair outra face no dado eu jogo novamente.
   (a) Calcule a matriz de transição.
   (b) Se o bêbado sai do quarto 1, qual a probabilidade de ele nunca chegar no quarto 6?

Referências

[1] S.M.Ross (1997) *Introduction to probability models.* Chapter 4.1-2.