Aula 6. Processo de Poisson – Aplicações.

Processo de Poisson não-homogêneo.

Definição 1 *O processo de contagem* $\{N(t),\ T \geq 0\}$ *chama-se* Processo de Poisson não-homogêneo com função de intensidade $\lambda(t),\ t \geq 0$, *se*

1. $N(0) = 0$;
2. $\{N(t),\ t \geq 0\}$ *tem incrementos independentes;*
3. $P\{N(t+h) - N(t) \geq 2\} = o(h)$;
4. $P\{N(t+h) - N(t) = 1\} = \lambda(t)h + o(h)$.

Ex.1. Seja $m(t) = \int_0^t \lambda(s)ds$. Prove que

$$P\{N(t+s) - N(t) = n\} = e^{m(t+s)-m(t)} \frac{[m(t+s) - m(t)]^n}{n!}, \quad n \geq 0 \tag{1}$$

S. Seja t fixo. Definimos

$$P_n(s) = P\{N(t+s) - N(t) = n\}.$$

Temos

$$\begin{aligned}
P_0(s+h) &= P\{N(t+s+h) - N(t) = 0\} \\
&= P\{\text{ 0 eventos ocorrem em } (t, t+s),\ \text{0 eventos em } [t+s, t+s+h]\} \\
&= P\{\text{ 0 eventos ocorrem em } (t, t+s)\}P\{\text{ 0 eventos em } [t+s, t+s+h]\} \\
&= P_0(s)[1 - \lambda(t+s)h + o(h)].
\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{P_0(s+h) - P_0(s)}{h} = -\lambda(t+s)P_0(s) + \frac{o(h)}{h} \quad \Rightarrow (h \to 0) \Rightarrow \quad P_0'(s) = -\lambda(t+s)P_0(s)$$

e, portanto,

$$\log P_0(s) = -\int_0^s \lambda(t+u)du = -\int_t^{t+s} \lambda(y)dy \quad \Rightarrow \quad P_0(s) = e^{-[m(t+s)-m(t)]}.$$

Ex.2 Concluir a prova de (1).

Ex.3 A chegada de clientes em uma loja forma um processo de Poisson com a seguinte intensidade: a intensidade começa com 5 clientes por hora e aumenta linearmente até o máximo de 20 clientes por hora em 11 horas. Das 11:00hs até 13:00hs, a intensidade é constante igual a 20 clientes por hora. E depois, a intensidade diminue até atingir em 17 horas a intensidade de 12 clientes por hora. Qual é a probabilidade de que nenhum cliente chegue entre 8:30hs e 9:30hs da manhã? Qual é o número médio de clientes durante este período?

S. Temos um processo de Poisson não-homogêneo com função de intensidade $\lambda(t)$ dada pela seguinte fórmula

$$\lambda(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 8, \\ 5 + 5(t-8), & 8 \leq t \leq 11, \\ 20, & 11 \leq t \leq 13, \\ 20 - 2(t-13), & 13 \leq t \leq 17, \\ 0, & 17 < t \leq 24, \end{cases}$$

e $\lambda(t) = \lambda(t-24)$ para $t > 24$. O número de clientes entre 8.30 e 9.30 tem distribuição de Poisson com média $m(9.5) - m(8.5)$. Logo,

$$\exp\Big\{-\int_{8.5}^{9.5} (5 + 5(t-8))dt\Big\} = \exp\Big\{-\int_{1/2}^{3/2} (5 + 5t)dt\Big\} = e^{-10}$$

e o número médio é

$$\int_{1/2}^{3/2} (5 + 5t)dt = 10.$$

Quando a intensidade $\lambda(t)$ é limitada, podemos imaginar o processo não-homogêneo como uma inferência aleatória de um processo homogêneo. Seja λ tal que $\lambda(t) \leq \lambda$ para todos os $t \geq 0$. Consideramos um processo de Poisson com taxa λ. Supomos que o evento que ocorre em instante t, vai ser contado com probabilidade $\lambda(t)/\lambda$. Assim a nova contagem forma um processo de Poisson não-homogêneo com taxa $\lambda(t)$. O seguinte exercício prova essa proposição.

Ex.4 Prove que para o novo processo

$$P\{ \text{ um evento contado ocorre em } (t, t+h)\} = \lambda(t)h + o(h).$$

S. Exercício 2 da lista "Exercícios domésticos". □

Distribuição de S_n do Processo de Poisson não homogêneo.

Seja S_n o instante de tempo que ocorre o n-ésimo evento no processo de Poisson não-homogêneo. A função da densidade dele pode ser obtida da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} P\{t < S_n < t+h\} &= P\{N(t) = n-1, \text{ um evento em } (t, t+h)\} + o(h) \\ &= P\{N(t) = n-1\} P\{ \text{ um evento em } (t, t+h)\} + o(h) \\ &= e^{-m(t)} \frac{[m(t)]^{n-1}}{(n-1)!} [\lambda(t)h + o(h)] + o(h) \\ &= \lambda(t) e^{-m(t)} \frac{[m(t)]^{n-1}}{(n-1)!} h + o(h) \end{aligned}$$

o que significa que

$$f_{S_n}(t) = \lambda(t) e^{-m(t)} \frac{[m(t)]^{n-1}}{(n-1)!}$$

onde

$$m(t) = \int_0^t \lambda(s) ds.$$

Processo de Poisson composto.

Um processo estocástico $X(t)$ é chamado *processo de Poisson composto,* se ele pode ser representado da seguinte forma:

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i, \quad t \geq 0, \tag{2}$$

em que $N(t)$ é um processo de Poisson e os Y_i's são variáveis aleatórias independentes, identicamente distribuídas, e também independentes de $N(t)$.

Exemplos:

1. Se $Y_i \equiv 1$, então $X(t)$ é um processo de Poisson.

2. Supomos que $N(t)$ é a chegada de ônibus para um evento, e Y_i é o número de passageiros no i-ésimo ônibus. Então, $X(t)$ é o número de participantes do evento que chegaram até o tempo t.

3. Supomos que a saída de clientes de um supermercado forma um processo de Poisson $N(t)$. Seja Y_i quantia de dinheiro deixada no supermercado pelo i-ésimo cliente. Assim $X(t)$ é o quanto de dinheiro foi deixado no supermercado até o tempo t.

Calcularemos agora a média e a variância de $X(t)$. Temos que

$$E[X(t)] = E[E[X(t) \mid N(t)]].$$

Agora,

$$E[X(t) \mid N(t) = n] = E\Big[\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i \Big| N(t) = n\Big] = E\Big[\sum_{i=1}^{n} Y_i \Big| N(t) = n\Big] = E\Big[\sum_{i=1}^{n} Y_i\Big] = nE[Y_1].$$

Logo,

$$E[X(t)] = E[E[X(t) \mid N(t)]] = E[N(t)E[Y_1]] = \lambda t E[Y_1].$$

O cálculo da variância basea-se na seguinte fórmula (veja Capítulo 3 [1]):

$$Var[X(t)] = E[Var(X(t) \mid N(t))] + Var(E[X(t) \mid N(t)]) \tag{3}$$

Temos

$$Var(X(t) \mid N(t) = n) = Var\Big(\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i \;\Big|\; N(t) = n\Big) = Var\Big(\sum_{i=1}^{n} Y_i\Big) = nVar(Y_1).$$

Assim, usando (3), obtemos

$$\begin{aligned} Var[X(t)] &= E[N(t)Var(Y_1)] + Var(N(t)E[Y_1]) = \lambda t Var(Y_1) + (E[Y_1])^2 \lambda t \\ &= \lambda t[Var(Y_1) + (E[Y_1])^2] = \lambda t E[Y_1^2]. \end{aligned}$$

Ex.5. Supomos que a chegada de famílias em Porto Velho forma um processo de Poisson com intensidade $\lambda = 2$ famílias por semana. Supondo que o número de pessoas em uma família pode ser igual a 1, 2, 3, 4 com probabilidades $1/6, 1/3, 1/3, 1/6$, respectivamente. Qual é a média e a variância do número de pessoas imigradas para Porto Velho durante cinco semanas?

S. Seja Y_i o número de pessoas na i-ésima família. Temos

$$\begin{aligned} E[Y_i] &= 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{2} \\ E[Y_i^2] &= 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{3} + 3^2 \cdot \frac{1}{3} + 4^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{43}{6}. \end{aligned}$$

Se $X(5)$ é o número de pessoas que chegaram durante 5 semanas, então

$$E[X(5)] = 2 \cdot 5 \cdot \frac{5}{2} = 25 \quad \text{e} \quad Var(X(5)) = 2 \cdot 5 \cdot \frac{43}{6} = \frac{215}{3}.$$

Exercícios domésticos. Exercicios para Lista 2018: 1, 8, 9, 12, 16.

1. Exercício 2. Concluir a prova de (1).
2. Exercício 4.
3. A chegada de clientes forma um processo de Poisson com taxa λ. Existe um número infinito de atendentes com distribuição acumulada G para o tempo de atendimento. Na teoria das filas, essa situação denota-se como $M/G/\infty$. Prove que para esse sistema o processo de saída de clientes do sistema de atendimeto forma um processo de Poisson não homogêneo com função de intensidade $\lambda(t) = \lambda G(t)$.
4. No exemplo **Ex.5.** encontre aproximadamente a probabilidade de que pelo menos 240 pessoas cheguem em Porto Velho dentro das próximas 50 semanas. (Use aproximação normal.)
5. A média de um processo de Poisson não-homogêneo é dada pela fórmula $m(t) = t^2 + 2t, \quad t \geq 0$. Qual é a probabilidade de que n eventos ocorram entre o tempo $t = 4$ e o tempo $t = 5$?
6. (Exercício 9, [1]) X tem distribuição exponencial com intensidade λ.
   (a) usando a definição de média condicional, ache $E[X \mid X < c]$, em que c é uma constante positiva;
   (b) agora, ache $E[X \mid X < c]$ usando a igualdade
   $$E[X] = E[X \mid X < c]P\{X < c\} + E[X \mid X > c]P\{X > c\}.$$
7. (Exercício 13, [1]) Sejam X_1 e X_2 variáveis exponenciais independentes e identicamente distribuídas com intensidade μ. Definimos $X_{(1)} = \min(X_1, X_2)$ e $X_{(2)} = \max(X_1, X_2)$. Ache $E[X_{(1)}],\ Var[X_{(1)}],\ E[X_{(2)}],\ Var[X_{(2)}]$.
8. (Exercício 33, [1]) Seja $N(t)$ um Processo de Poisson com taxa λ. Seja S_n o instante da ocorrência do n-ésimo evento. Encontre
   (a) $E[S_4]$;
   (b) $E[S_4 \mid N(1) = 2]$;
   (c) $E[N(4) - N(2) \mid N(1) = 3]$;

(d) $E[S_1 \mid N(2) = 1]$;

(e) $E[S_1 \mid N(3) = k],\ k \geq 2$.

9. (Exercício 38, [1]) Para um processo de Poisson, mostre, para $s < t$, que

$$P\{N(s) = k \mid N(t) = n\} = \binom{n}{k} \left(\frac{s}{t}\right)^k \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

10. (Exercício 40, [1]) Eventos ocorrem de acordo com um processo de Poisson com taxa $\lambda = 2$ por hora.

    (a) Qual é a probabilidade de que nenhum evento ocorra entre 8:00hs e 9:30hs?

    (b) Começamos a observar o processo ao meia-dia. Qual é a média de tempo de espera do quinto evento?

    (c) Qual é a probabilidade de que dois ou mais eventos ocorram entre 6:00hs e 8:00hs?

11. (Exercício 43, [1]) A chegada de clientes em um banco forma um processo de Poisson com taxa λ. Supomos que somente dois clientes chegaram durante a primeira hora. Qual é a probabilidade de

    (a) os dois chegaram durante os primeiros 20 minutos;

    (b) pelo menos um chegou durante os primeiros 20 minutos.

12. Exercício 46, [1]) Consideramos um sistema de atendimento com um número infinito de funcionários. A chegada de clientes nesse sistema forma um processo do Poisson com intensidade λ e os tempos de atendimento para os clientes são independentes e seguem distribuição exponencial com taxa μ. Seja $X(t)$ o número de clientes no sistema (clientes que estão em atendimento no instante t). Encontre

    (a) $E[X(t + s) \mid X(s) = n]$;

    (b) $Var[X(t + s) \mid X(s) = n]$.

13. (Exercício 47, [1]) A chegada de pessoas em um ponto de ônibus é um processo de Poisson com taxa λ. O ônibus vai sair no instante t. Seja X o tempo total de espera – soma dos tempos de espera de todas as pessoas até pegar o ônibus. Seja $N(t)$ o número de chegadas de pessoas até o tempo t.

    (a) Ache $E[X \mid N(t)]$;

    (b) Mostre que $Var[X \mid N(t)] = N(t)t^2/12$;

    (c) Ache $Var(X)$;

14. (Exercício 56, [1]) Uma loja abre as portas às 8 horas. Das 8 até 10 horas, clientes chegam de acordo com uma distribuição Poisson com taxa de 4 clientes por hora, das 10 até 12 horas com taxa de 8 clientes por hora, e das 12 até 17 horas, com taxa de 6 clientes por hora. Qual é a distribuição do número de clientes em um dia?

15. Chegadas de e-mails em um distribuidor forma um processo de Poisson $N(t)$ com taxa λ. Cada e-mail vai ser classificado em: *pesado*, se o tamanho dele for maior do que 1Mg, e *leve*, se o tamanho dele menor do que 1 Mg. Os tamanhos (em Mg) dos e-mails são independentes e seguem distribuição exponencial com intensidade 1.

    (a) Qual é a distribuição do número de e-mails pesados que chegaram até o tempo t, se sabemos que $N(t) = n$?

    (b) Qual é a distribuição do número de e-mails pesados que chegaram em em intervalo de tempo $(t, t + s)$?

    (c) Qual é a distribuição do número de e-mails pesados que chegaram em em intervalo $(t, t + s)$, sabendo que $N(t) = n$?

16. Carros passam por uma via de uma pista e mão única de acordo com um processo de Poisson de taxa $\lambda = 3$. Se um bichinho atravessa a rua em s segundos, qual a probabilidade que o bichinho vai ser atropelado? Responda essa questão para $s = 5, 10, 20, 30$.

17. Uma certa teoria científica admite que erros em divisões celulares ocorrem de acordo com um processo de Poisson de taxa 2.5 por ano, e cada indivíduo morre quando 196 erros desse tipo ocorrem. Assumindo correta essa teoria, encontre:

    (a) O tempo de vida médio de um indivíduo.

    (b) A variância do tempo de vida de um indivíduo.

Referências

[1] S.M.Ross (1997) *Introduction to probability models.* Chapter 5.3., Chapter 5.4.