Aula 5. Exercícios. MAE499 Processos Estocásticos. 1^o Semestre 2020.

1. Uma loja abre as portas às 8 horas. Das 8 até 10 horas, clientes chegam de acordo com uma distribuição Poisson com taxa de 4 clientes por hora, das 10 até 12 horas com taxa de 8 clientes por hora, e das 12 até 17 horas, com taxa de 6 clientes por hora. Qual é a distribuição do número de clientes em um dia?

   Solução. Assumindo que um dia para loja é o intervalo das 8 horas até 17 horas, seja X é número de clientes em um dia. Achamos a média desse número, $\mathbb{E}(X)$: de acordo com o teorema

$$\mathbb{E}(X) = \int_8^{17} \lambda(t)dt,$$

   em que

$$\lambda(t) = \begin{cases} 4, & \text{se } t \in [8, 10), \\ 8, & \text{se } t \in [10, 12), \\ 6, & \text{se } t \in [12, 17], \end{cases}$$

   então

$$\mathbb{E}(X) = \int_8^{17} \lambda(t)dt = \int_8^{10} 4dt + \int_{10}^{12} 8dt + \int_{12}^{17} 6dt = 4 \cdot 2 + 8 \cdot 2 + 6 \cdot 5 = 54.$$

   Assim, a distribuição de X é Poisson com média 54. □

2. Carros passam por uma rua de mão única de acordo com um processo de Poisson de taxa $\lambda = 3$ carros por um minuto. Se um bichinho atravessa a rua em s segundos, qual a probabilidade que o bichinho não vai ser atropelado? Calcule a responda para $s = 5, 10, 20, 30$.

   Solução. Assumindo que para um bichinho não ser atropelado precisa que durante o percurso dele nenhum carro passa, a probabilidade de não ser atropelado é igual a probabilidade de que nenhum carro passa durante $s(s = 5, 10, 20, 30)$ segundos. Levando em conta, que em um momento que o bichinho entra na rua, pela propriedade de falta de memória a distribuição de instante de primeiro carro passar, T, é distribuição exponencial com taxa $\lambda = 3$ medindo esse tempo em minutos (ou $\lambda = 3/60 = 1/20$ medindo esse tempo em segundos). Assim, a probabilidade procurada é

   (a) (em minutos) $\lambda = 3$

$$\mathbb{P}\left(T > \frac{s}{60}\right) = \exp\left(-3 \cdot \frac{s}{60}\right) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{4}} \cong 0.78 & \text{se } s = 5; \\ e^{-\frac{1}{2}} \cong 0.61 & \text{se } s = 10; \\ e^{-1} \cong 0.37 & \text{se } s = 20; \\ e^{-\frac{3}{2}} \cong 0.22 & \text{se } s = 30; \end{cases}$$

   (b) (em segundos) $\lambda = 1/20$

$$\mathbb{P}(T > s) = \exp\left(-\frac{1}{20} \cdot s\right) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{4}} \cong 0.78 & \text{se } s = 5; \\ e^{-\frac{1}{2}} \cong 0.61 & \text{se } s = 10; \\ e^{-1} \cong 0.37 & \text{se } s = 20; \\ e^{-\frac{3}{2}} \cong 0.22 & \text{se } s = 30. \end{cases}$$

   □

3. Sabe-se que depois de um ano de garantia de um aparelho, as falhas desse aparelho podem ser modeladas como um processo de Poisson com a taxa que cresce de forma linear como $\lambda(t) = 1 + t$. Seja $N(\cdot)$ um Processo de Poisson com a taxa $\lambda(t) = 1 + t$. Seja S_n instante de ocorrência de n-ésima falha.

   (a) Mostre, que a média de tempo de uso de aparelho até a primeira falha, $\mathbb{E}[S_1]$, pode ser representada como $\mathbb{E}[S_1] = \sqrt{2\pi e}\mathbb{E}((X^2 + X)\mathbb{1}(X > 0))$, em que a variável aleatória X tem a distribuição normal $N(-1, 1)$, e $\mathbb{1}(A)$ é indicador de evento A, ele "pega"o valor 1, se evento A ocorre, e valor 0 caso contrário.

   (b) Calculate numerically essa média e a variância usando algum programa de sua preferencia.

   Solução.

   Q: Mostre, que a média de tempo de uso de aparelho até a primeira falha, $\mathbb{E}[S_1]$, pode ser representada como $\mathbb{E}[S_1] = \sqrt{2\pi e}\mathbb{E}((X^2 + X)\mathbb{1}(X > 0))$, em que a variável aleatória X tem a distribuição normal $N(-1, 1)$, e $\mathbb{1}(A)$ é indicador de evento A, ele "pega"o valor 1, se evento A ocorre, e valor 0 caso contrário.

S: A densidade de n-ésima ocorrência de um processo de Poisson não-homogêneo com a taxa $\lambda(t)$ é dada pela formula
$$f_{S_n}(t) = \lambda(t) e^{-m(t)} \frac{(m(t))^{n-1}}{(n-1)!}, \quad \text{onde } m(t) = \int_0^t \lambda(s) ds.$$
Então, usando $\lambda(t) = 1 + t$, a densidade de primeira ocorrência é
$$f_{S_n}(t) = (1+t) \exp\left(-\left(t + \frac{t^2}{2}\right)\right) = (1+t) \exp\left(-\frac{1}{2}\left(t^2 + 2t + 1\right) + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{2\pi e}(1+t) \frac{\exp\left(-\frac{(t+1)^2}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}},$$
e a esperança
$$\mathbb{E}(S_1) = \int_0^\infty t f_{S_n}(t) dt = \sqrt{2\pi e} \int_0^\infty t(1+t) \frac{\exp\left(-\frac{(t+1)^2}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}} dt = \sqrt{2\pi e}\mathbb{E}\big(X(1+X)\mathbb{1}(X>0)\big),$$
onde X tem a densidade $\frac{\exp\left(-\frac{(t+1)^2}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}}$ o que corresponde a distribuição normal, com média -1 e variância 1. Lembrando da densidade $N(\mu, \sigma^2)$:
$$\frac{\exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}.$$
$\square$

Q: Calculate numerically essa média e a variância usando algum programa de sua preferencia.

S: Escolho aquele que da para usar pelo internet, por exemplo, https://www.wolframalpha.com e procuro "Calculus & Analysis", depois, in sessão "Integral"escolho "Compute a definite integral:"e em caixa do comando escrevo:

```
integrate x*(1+x)*exp(-x-x^2/2) dx from x=0 to Inf
```

o que da o resultado $\mathbb{E}(S_1) = \int_0^\infty x(1+x)\exp\left(-x - \frac{x^2}{2}\right) \approx 0.65568$. Para calcular a variância de S_1, primeiro calculamos o segundo momento $\mathbb{E}(S_1^2)$:

```
integrate x^2*(1+x)*exp(-x-x^2/2) dx from x=0 to Inf
```

o que resulta em $\mathbb{E}(S_1^2) = \int_0^\infty x^2(1+x)\exp\left(-x - \frac{x^2}{2}\right) \approx 0.688641$. E a variância:
$$\mathbb{V}ar(S_1) = \mathbb{E}(S_1^2) - (\mathbb{E}(S_1))^2 \cong 0.688641 - (0.65568)^2 = 0.2587247$$
$\square$

4. Seja $N(\cdot)$ processo de Poisson com taxa $\lambda(t) = 10te^{-t}$, $t \geq 0$, não-homogêneo, composto: os "pulos" Y_i são i.i.d. com a seguinte distribuição: $\mathbb{P}(Y_i = 1) = \mathbb{P}(Y_i = 2) = 0.5$.

   (a) Achar o valor maximal da taxa.
   (b) Qual é a distribuição de número de ocorrências durante todo tempo $[0, \infty)$, denotamos essa variável X_∞.
   (c) Achar a média de $N(\infty)$, determinando isso de seguinte forma em limite: $\mathbb{E}(N(\infty)) := \lim_{T\to\infty} \mathbb{E}(N(T))$.

Solução.

Q: Achar o valor maximal da taxa.

S: $0 = (\lambda(t))' = (10te^{-t})' = 10e^{-t}(1-t)$. Então, $t = 1$ é raiz e o valor maximal é $\lambda(1) = 10e^{-1} = 3.678794$. $\square$

Q: Qual é a distribuição de número de ocorrências durante todo tempo $[0, \infty)$, denotamos essa variável X_∞.

S: Sabemos que para instante fixo de tempo T a distribuição de número de ocorrências X_T é de Poisson com a média
$$m(T) = \int_0^T \lambda(t) dt = 10 \int_0^T te^{-t} dt = 10\left(t(-e^{-t})\Big|_0^T + \int_0^T e^{-t} dt \right) = 10(-Te^{-T} + 1 - e^{-T}).$$
Assim, porque o limite $m(T)$ existe e é finito, então
$$m(\infty) = \lim_{T\to\infty} 10(-Te^{-T} + 1 - e^{-T}) = 10.$$
Então o número de ocorrências X_∞ tem distribuição de Poisson com a média 10. $\square$

Q: Achar a média de $N(\infty)$, determinando isso de seguinte forma em limite:

$$\mathbb{E}(N(\infty)) := \lim_{T\to\infty} \mathbb{E}(N(T)).$$

S:

$$\mathbb{E}(N(\infty)) := \lim_{T\to\infty} \mathbb{E}(N(T)) = \lim_{T\to\infty} \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{X_T} Y_i\right) = \left(\lim_{T\to\infty} \mathbb{E}(X_T)\right)\mathbb{E}(Y_1) = 10 \cdot \left(1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2}\right) = 15.$$

$\square$