Lista 5. Processo de Poisson. Exemplos. Gabarito.

Solução Exercício 1(a). Seja T um instante de tempo fixo. O número X_T de eventos tipo I que ocorrem em intervalo $[0,T]$ tem distribuição de Poisson com a média

$$\mathbb{E}(X_T) = \lambda \int_0^T p(s)ds = \lambda \int_0^T e^{-2s} ds = \frac{\lambda}{2}(1-e^{-2T}).$$

Quando $T \to \infty$ v.a. X_T converge para v.a. X que é número de eventos do tipo I em intervalo $[0,\infty)$, e

$$\lim_{T\to\infty} \mathbb{E}(X_T) = \lim_{T\to\infty} \frac{\lambda}{2}(1-e^{-2T}) = \frac{\lambda}{2} =: \mathbb{E}(X) < \infty.$$

Assim deduzimos que v.a. X não pode possuir valor infinito, porque a esperança dela é finita.

Solução Exercício 1(b). A distribuição desse número X é Poisson, pois para cada $k = 0, 1, \ldots$

$$\mathbb{P}(X_T = k) = \frac{(\lambda(1-e^{-2T})/2)^k}{k!} e^{-\lambda(1-e^{-2T})/2} \to \frac{\lambda/2}{k!} e^{-\lambda/2}, \text{ quando } T \to \infty.$$

o que mostra que $X \sim Poi(\lambda/2)$.

Solução Exercício 1(c). Ja usamos que o número de eventos do tipo I ocorridos durante todo intervalo de tempo $[0,\infty)$ é $\lambda/2$.

□

Solução Exercício 2. Se o tamanho X (em Mg) de um e-mail tem distribuição exponencial com taxa 1, então esse e-mail é leve com a probabilidade

$$p = \mathbb{P}(X \le 1) = 1 - e^{-1}$$

e pesado com probabilidade $q = 1 - p = e^{-1}$.

(a) se sabemos que ate tempo t chegou n e-mails, então a distribuição de número de e-mail pesados entre esses é $B(n, e^{-1})$;

(b) por causa de estacionaridade de processo de Poisson a distribuição de número de e-mails pesados em intervalo $[t, t+s]$ tem a mesma distribuição com número de e-mails pesados em intervalo $[0, s]$, assim, sabendo que o número de e-mails pesados forma processo de Poisson com taxa λe^{-1}, o número de eventos de tipo I que ocorram em intervalo $[0, s]$ tem distribuição de Poisson com a média $\lambda e^{-1}s$;

(c) sabendo que número de e-mails pesados chegados ate tempo t é igual à n, não influencia em distribuição desses e-mails em intervalo $[t, t+s]$ por causa de incrementos independentes. Assim a resposta é a mesma como no item anterior.

□

Solução Exercício 3.

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X_{U_1}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_{U_1} \mid U_1)) = \mathbb{E}(\frac{1}{\lambda}) = \frac{1}{\lambda}.$$

Solução Exercício 4.

(a) Seja $\{\tau_i\}$ intervalos entre eventos que são i.i.d. com média $1/\lambda$. Então $\mathbb{E}(S_4) = \mathbb{E}(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4) = 4 \cdot \frac{1}{\lambda} = \frac{4}{\lambda}$.

(b) $\mathbb{E}(S_4 \mid N(1) = 2)$. Pela falta de memória podemos dizer que $S_4 = 1 + \tau_1 + \tau_2$, assim $\mathbb{E}(S_4 \mid N(1) = 2) = 1 + \frac{2}{\lambda}$.

(c) Pela propriedade de incrementos independentes $\mathbb{E}(N(4) - N(3) \mid N(1) = 3) = \mathbb{E}(N(4) - N(3)) = \lambda$.

(d) Sabendo que $N(2) = 1$, significa que existe um evento em intervalo $[0, 2]$ e a posição dele, S_1, tem distribuição uniforme neste intervalo, o que significa que a média dessa posição é 1: assim, $\mathbb{E}(S_1 \mid N(2) = 1) = 1$.

(e) Neste caso $S_1 = \min(X_1, \ldots, X_k)$, em que $X_i \sim U[0,3]$. Para achar a média de S_1 acharemos densidade $f(s)$ dela: para s em intervalo $[0,3]$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(S_1 > s) = \mathbb{P}(X_1 > s, \ldots, X_k > s) = \prod_{i=1}^{k} \mathbb{P}(X_i > s) = \left(\frac{3-s}{3}\right)^k;\\
&F(s) = \mathbb{P}(S_1 \leq s) = 1 - \left(\frac{3-s}{3}\right)^k;\\
&f(s) = (F(s))' = \frac{k}{3}\left(\frac{3-s}{3}\right)^{k-1}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S_1 \mid N(3) = k) &= \int_0^3 s\frac{k}{3}\left(\frac{3-s}{3}\right)^{k-1} ds \;=\; -\int_0^3 sd\left(\frac{3-s}{3}\right)^k\\
&= \int_0^3 \left(\frac{3-s}{3}\right)^k ds \;=\; \frac{3}{k+1}\left(\frac{3-s}{3}\right)^{k+1}\Big|_0^3 \;=\; \frac{3}{k+1}.
\end{aligned}$$

□

Solução Exercício 8. $N(\cdot) \sim P.P.(\lambda)$. Para $0 \leq m \leq n$ e $0 \leq s < t$ quaisquer temos que achar a probabilidade condicional $\mathbb{P}(N(s) = m \mid N(t) = n)$. Assim, essa probabilidade pode ser definida assim: achar a probabilidade de que entre n pontos jogados uniformemente e independentemente em intervalo $[0,t]$ exatamente m deles ficaram em intervalo $[0,s]$. O que da a resposta

$$\binom{n}{m}\left(\frac{s}{t}\right)^m\left(1 - \frac{s}{t}\right)^{n-m}.$$

□