Aula 5. Processo de Poisson. Exemplos.

Exemplo 1. Processo de Poisson com diferentes tipos de eventos.

Consideramos um processo de Poisson com intensidade λ. Suponha que em cada instante de ocorrência de evento com probabilidade $p_i, i = 1, \dots, n, (p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1)$ vamos classificar o evento como o evento do tipo i. Por exemplo, considere que as pessoas que entram numa loja formam um processo de Poisson com intensidade λ. Podemos supor que a pessoa que entra na loja pode ser jovem com probabilidade 10%, pode ser adulto com probabilidade 70% e idoso com probabilidae 20%. Neste caso $p_1 = 0.1, p_2 = 0.7$ e $p_3 = 0.2$, notamos que $p_1 + p_2 + p_3 = 1$. Sejam $N_i(t)$ o número de eventos do tipo i que ocorreram até o tempo t.

O processo $\{N_i(t), t \geq 0\}$ *é um processo de Poisson com intensidades* $p_i\lambda$ *para cada* $i = 1, \dots, n$. *Os processos* $N_1(t), N_2(t), \dots, N_n(t)$ *são independentes.*

Ex. 1. Suponha que a chegada dos imigrantes em um país formam um processo de Poisson com intensidade $\lambda = 1$ pessoa por um dia. Sabe-se que 40% dos imigrantes são europeus, 40% são africanos e 20% são asiáticos. Qual é o tempo médio até que o décimo imigrante asiático chegue?

Solução. Imigrantes asiáticos formam um processo de Poisson com intensidade $\lambda_{as} = \lambda \cdot 0.2 = 0.2$. Seja S_{10} o tempo de espera do décimo imigrante asiático. Temos que $E[S_{10}] = 10\frac{1}{\lambda_{as}} = 10\frac{1}{0.2} = 50$ dias. $\square$

Exemplo 2. Distribuição condicional do tempo de chegada ([1], Chapter 5.3.5).

Sabe-se que exatamente um evento ocorreu durante o tempo $(0, t]$. Qual é a distribuição de tempo da ocorrência deste evento? Devido à estacionaridade e independência dos incrementos, espera-se a distribuição uniforme. Temos,

$$\begin{aligned} F(s) = P\{T_1 \leq s \mid N(t) = 1\} &= \frac{P\{T_1 \leq s, N(t) = 1\}}{P\{N(t) = 1\}} = \frac{P\{1 \text{ evento em } [0, s]; 0 \text{ eventos em } (s, t]\}}{P\{N(t) = 1\}} \\ &= \frac{P\{1 \text{ evento em } [0, s]\}P\{0 \text{ eventos em } (s, t]\}}{P\{N(t) = 1\}} = \frac{\lambda s e^{-\lambda s} e^{-\lambda(t-s)}}{\lambda t e^{-\lambda t}} = \frac{s}{t} \end{aligned}$$

e a densidade

$$(F(s))' = \left(\frac{s}{t}\right)' = \frac{1}{t}, \quad s \in [0, t].$$

O que prova que a distribuição de tempo de ocorrência condicional seja uniforme no intervalo $[0, t]$.

Este resultado pode ser generalizado, mas para isso, temos que introduzir o conceito de estatísticas de ordem. Sejam $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ variáveis aleatórias. Vamos dizer que $Y_{(1)}, Y_{(2)}, \dots, Y_{(n)}$ são estatísticas de ordem que correspondem a $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$, se $Y_{(k)}$ é o k-ésimo menor valor entre $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$, $k = 1, 2, \dots, n$. Por exemplo, se $n = 3$ e $Y_1 = 4, Y_2 = 5, Y_3 = 1$, então $Y_{(1)} = 1, Y_{(2)} = 4, Y_{(3)} = 5$. Se $Y_i, i = 1, \dots, n$, são independentes identicamente distribuidas com a densidade f, então a densidade conjunta das estatísticas de ordem $Y_{(1)}, Y_{(2)}, \dots, Y_{(n)}$ é dado pela fórmula

$$f(y_1, y_2, \dots, y_n) = n! \prod_{i=1}^{n} f(y_i), \quad y_1 < y_2 < \cdots < y_n. \tag{1}$$

A inferência de (1) segue o seguinte raciocínio:

(i) $(Y_{(1)}, Y_{(2)}, \dots, Y_{(n)})$ é igual à $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ se $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ é igual a qualquer uma das $n!$ permutações de $(y_1, y_2, \dots, y_n)$;

(ii) a densidade de que $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ é igual a $(y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_n})$ é $\prod_{j=1}^{n} f(y_{i_j}) = \prod_{j=1}^{n} f(y_j)$, onde $i_1, \dots, i_n$ é uma permutação dos índices $1, 2, \dots, n$.

Se a distribuição de Y_i é uniforme no intervalo $[0, t]$, então a densidade conjunta das estatísticas de ordem (1) é

$$f(y_1, y_2, \dots, y_n) = \frac{n!}{t^n}, \quad 0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_n < t. \tag{2}$$

Ex.2 Sabe-se que $N(t) = n$. A distribuição conjunta de n tempos de ocorrências $S_1, \dots, S_n$ desses eventos é igual a distribuição de estatísticas de ordem para n variáveis independentes e uniformemente distribuídas no intervalo $[0, t]$.

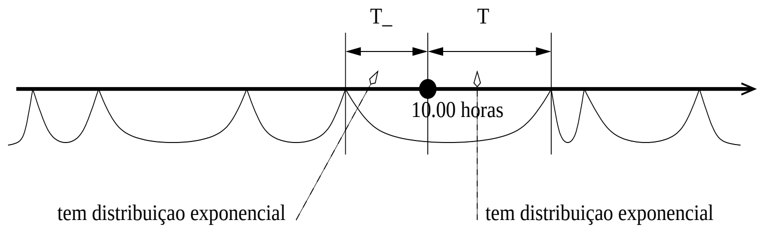

Figura 1: *Instante 10 horas cobra-se com "mais chances"com um intervalo "largo- soma de duas variáveis independentes $T_- + T$ e exponencialmente (com a intensidade λ) distribuídas. Então, o intervalo que vai cobrir o instante 10hs tem distribuição gamma com os parâmetros 2 e λ. Essa distribuição mais "larga"de que uma exponencial com a mesma intensidade λ.*

Solução. Para obter a densidade conjunta condicional de $S_1, \ldots, S_n$ dado que $N(t) = n$ notaremos que para $0 < s_1 < \cdots < s_n < t$, o evento $\{S_1 = s_1, S_2 = s_2, \ldots, S_n = s_n, N(t) = n\}$ é equivalente ao evento que os $n+1$ tempos entre ocorrências satisfazem $T_1 = s_1, T_2 = s_2 - s_1, \ldots, T_n = s_n - s_{n-1}, T_{n+1} > t - s_n$. Logo

$$\begin{aligned} f(s_1, \ldots, s_n \mid n) &= \frac{f(s_1, \ldots, s_n, n)}{P\{N(t) = n\}} \\ &= \frac{\lambda e^{-\lambda s_1} \lambda e^{-\lambda(s_2 - s_1)} \ldots \lambda e^{-\lambda(s_n - s_{n-1})} e^{-\lambda(t - s_n)}}{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n / n!} = \frac{n!}{t^n}, \quad 0 < s_1 < \cdots < s_n < t. \end{aligned}$$

Compare com (2). □

Exemplo 3. Paradoxo de tempo de espera.

Suponha que as chegadas de ônibus formam um processo de Poisson com intensidade λ ônibus por hora. Suponha que um homem chega às 10:00hs no ponto de ônibus. Seja T o tempo que ele espera o próximo ônibus. Qual é a média do tempo de espera T.

Um raciocínio pode ser o seguinte. O intervalo de tempo entre os ocorrências tem distribuição exponencial com intensidade λ. Logo, o tempo médio de intervalo é $1/\lambda$. Por isso, espera-se que o tempo de espera deveria ser menor do que o tempo médio do intervalo entre as chegadas: $E[T] < 1/\lambda$, mais precisamente, espera-se que a média $E[T]$ seja igual a $1/2\lambda$, devido à "uniformidade"do momento de chegada do homem num ponto de ônibus dentro do intervalo entre chegadas de ônibus. Mas esse raciocínio está errado.

O raciocínio certo neste caso é usar a propriedade de distribuição exponencial: no momento quando o homem chega no ponto de ônibus, o intervalo de tempo do último ônibus até o próximo, que tem a distribuição exponencial, já "esqueceu"quanto tempo passou depois do último ônibus. Por isso, o tempo até o próximo ônibus tem distribuição exponencial com intensidade λ, o que significa que o homem vai esperar em média o tempo $1/\lambda : E[T] = 1/\lambda$, mas não $1/2\lambda$.

O mesmo resultado vale para o tempo T_- que passou da partida do último ônibus até o momento da chegada do homem no ponto do ônibus (até às 10:00hs). A distribuição de T_- é exponencial com a mesma intensidade λ. Este fato leva à seguinte conclusão: a distribuição do intervalo entre os ônibus cujo início é menor do que 10:00hs e o final é maior do que 10:00hs não tem distribuição exponencial, mas sim a distribuição gamma com os parâmetros 2 e λ (soma das duas variáveis exponenciais independentes com o mesmo parâmetro λ).

Exemplo 4. Coleção completa ([1], p.261).

Temos m diferentes tipos de cupons. Em cada instante, uma pessoa escolhe um cupom independentemente dos outros tipos de cupons já escolhidos. Supomos que ela escolhe um cupom do tipo j com probabilidade p_j, em que $\sum_{j=1}^m p_j = 1$. Seja N o número de cupons coletados necessários para completar uma coleção que tem pelo menos um cupom de cada tipo. Ache a média de N.

Solução. Seja N_j o número de tentativas para obter o primeiro cupom do tipo j. Para cada j, o número N_j tem distribuição geométrica com probabilidade de sucesso p_j. O número N pode ser representado agora pela formula

$$N = \max_{1 \le j \le m} N_j.$$

Infelizmente, os N_j's não são independentes. Mas o problema pode ser reduzido a achar a esperança de uma variável aleatória que é o máximo de variáveis *independentes.* Para isso, supomos que a pessoa escolhe um cupom em instantes de tempos que formam um processo de Poisson com taxa $\lambda = 1$. O evento que ocorre no processo de contagem classifica-se como evento do tipo j se foi escolhido um cupom do tipo j. Seja $N_j(t)$ o número do cupons escolhidos até o instante t. Sabemos que $N_j(t)$, para qualquer j, forma um processo de Poisson com a taxa $\lambda p_j = p_j$. Seja X_j o tempo da primeira ocorrência do evento do tipo j e seja

$$X = \max_{1\le j\le m} X_j$$

o tempo quando a coleção de cupons vai estar completa. Os tempos X_j's são independentes e exponencialmente distribuídos com intensidades p_j, logo obtemos

$$P\{X < t\} = P\{\max X_j < t\} = P\{X_j < t, \text{ para } j = 1, \dots, m\} = \prod_{j=1}^{m} \left(1 - e^{-p_j t}\right).$$

Logo, obtemos a esperança

$$E[X] = \int_0^\infty P\{X > t\} dt = \int_0^\infty \Big(1 - \prod_{j=1}^{m} \left(1 - e^{-p_j t}\right)\Big) dt.$$

Falta achar a esperança de N. Para isto, basta notar que

$$X = \sum_{i=1}^{N} T_i,$$

em que T_i são os intervalos de tempos entre sucessivas ocorrências de eventos no processo de Poisson com taxa 1. Logo,

$$E[X] = E[N]E[T_1] = E[N].$$

□

Exemplo 5. Amostragem do processo de Poisson

Sabemos que quando marcamos os eventos em um processo de Poisson (com taxa λ) como evento do tipo I com probabilidade p e evento do tipo II com probabilidade $1-p$, temos que as ocorrências dos eventos do tipo I (II) formam um processo de Poisson com taxa λp ($\lambda(1-p)$). Supomos agora que temos k tipos de eventos e as probabilidades de classificação dos eventos alteram-se durante o tempo (denotamos por $p_i(s)$). Com probabilidade $p_i(s)$, um evento ocorrido em instante s classifica-se como um evento do tipo i. Notamos que $\sum_{i=1}^{k} p_i(s) = 1$ para qualquer s.

Theorem 1 *([1], p.266) Seja $N_i(t),\ i = 1, \dots, k$, número de eventos do tipo i ocorridos durante um tempo t. Então, $N_i(t)$ são variáveis aleatórias independentes seguindo distribuição Poisson com médias*

$$E[N_i(t)] = \lambda \int_0^t p_i(s) ds. \tag{3}$$

Prova. Calcularemos a distribuição conjunta $P\{N_i(t) = n_i,\ i = 1, \dots, k\}$. Temos que

$$P\{N_i(t) = n_i,\ i = 1, \dots, k\} = P\{N_i(t) = n_i,\ i = 1, \dots, k \mid N(t) = \sum_{i=1}^{k} n_i\} P\{N(t) = \sum_{i=1}^{k} n_i\}.$$

Consideramos um evento ocorrido no intervalo $[0,t]$, que tem probabilidade p_i de ser do tipo i. No instante de ocorrência s, ele tem probabilidade $p_i(s)$ de ser do tipo i. O tempo de ocorrência é uniforme em $[0,t]$. Logo, pela probabilidade condicional

$$p_i = \int_0^t p_i(s) \frac{1}{t} ds = \frac{1}{t} \int_0^t p_i(s) ds,$$

independentemente de outros eventos ocorridos. Assim, a probabilidade condicional $P\{N_i(t) = n_i,\ i = 1, \dots, k \mid N(t) = \sum_{i=1}^{k} n_i\}$ é a probabilidade multinomial de n_i ocorrências do tipo $i,\ i = 1, \dots, k$. Cada evento entre $\sum_{i=1}^{k} n_i$ eventos ocorridos tem probabilidade p_i de ser do tipo i. Segue que

$$P\{N_i(t) = n_i,\ i = 1, \dots, k \mid N(t) = \sum_{i=1}^{k} n_i\} = \frac{(\sum_{i=1}^{k} n_i)!}{n_1! \dots n_k!} p_1^{n_1} \dots p_k^{n_k}.$$

Consequentemente,

$$P\{N_1(t) = n_1, \dots, N_k(t) = n_k\} = \frac{(\sum_{i=1}^{k} n_i)!}{n_1! \dots n_k!} p_1^{n_1} \dots p_k^{n_k} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{\sum_i n_i}}{(\sum_i n_i)!} = \prod_{i=1}^{k} e^{-\lambda t p_i} \frac{(\lambda t p_i)^{n_i}}{n_i!},$$

o que completa a prova do teorema. □

Exemplo 6. An infinite server queue ([1], p.266)

Supomos que a chegada de clientes em uma loja forma um processo de Poisson com taxa λ. A loja tem um número infinito de funcionários, por isso, cada cliente quando chega, já tem um funcionário para atendê-lo. Supomos que o tempo de atendimento de um cliente tem função de distribuição acumulada G.

1. Qual é a distribuição do número de clientes que já foram atendidos até o instante t? Denotamos esse número $X(t)$.

2. Qual é a distribuição do número $Y(t)$ de clientes que estão sendo atendidos no instante t?

3. Qual é a distribuição conjunta de $Y(t)$ e $Y(t+s)$? Encontre a covariância $cov(Y(t), Y(t+s))$.

Solução. Fixaremos um instante t. Cada cliente que chega em instante s, tem tempo $\eta_s \sim G$ de atendimento. Para cada cliente, vamos considerar que ele é do tipo 1 se o tempo de atendimento dele acaba até o instante t e que ele é do tipo 2 em caso contrário. Se o cliente chegou em instante s, a probabilidade dele ser

do tipo 1 é igual a $P\{\eta_s < t-s\}, = G(t-s)$

do tipo 2 é igual à $P\{\eta_s > t-s\} = 1 - G(t-s) =: \bar{G}(t-s)$.

Assim, usando o Teorema 1, obtemos que $X(t)$ e $Y(t)$ são independentes e têm distribuição de Poisson com as médias

$$E[X(t)] = \lambda \int_0^t G(t-s)ds = \lambda \int_0^t G(y)dy$$

e

$$E[Y(t)] = \lambda \int_0^t \bar{G}(t-s)ds = \lambda \int_0^t \bar{G}(y)dy,$$

respectivamente.

Para responder a última questão, introduzimos outra classificação de eventos. Se o cliente chegou em instante y, então ele vai ser classificado como o cliente

1. do tipo 1, se $y < t$ e o tempo de atendimento dele acaba em intervalo $[t, t+s]$; isto ocorre com probabilidade

$$p_1(y) = \begin{cases} G(t+s-y) - G(t-y), & \text{if } y < t \\ 0, & \text{em caso contrário} \end{cases}$$

2. do tipo 2, se $y < t$ e o tempo de atendimento dele acaba depois do $t+s$; isto ocorre com probabilidade

$$p_2(y) = \begin{cases} \bar{G}(t+s-y), & \text{if } y < t \\ 0, & \text{em caso contrário} \end{cases}$$

3. do tipo 3, se $y \in [t, t+s]$ e o tempo de atendimento dele acaba depois do $t+s$; isto ocorre com probabilidade

$$p_3(y) = \begin{cases} \bar{G}(t+s-y), & \text{if } t < y < t+s \\ 0, & \text{em caso contrário} \end{cases}$$

4. do tipo 4, em caso contrário. Isto ocorre com a probabilidade

$$1 - p_1(y) - p_2(y) - p_3(y).$$

Denotando $N_i = N_i(t+s)$ o número de eventos do tipo i, para $i = 1, 2, 3$, temos pelo Teorema 1 que N_i são independentes com distribuição de Poisson com média

$$E[N_i] = \lambda \int_0^{t+s} p_i(y)dy, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Vejamos que

$$Y(t) = N_1 + N_2, \qquad Y(t+s) = N_2 + N_3.$$

Agora podemos calcular a distribuição conjunta e covariância. Segue que

$$\begin{aligned} cov(Y(t), Y(t+s)) &= cov(N_1+N_2, N_2+N_3) = cov(N_2, N_2) \\ &= Var[N_2] = E[N_2] = \lambda \int_0^t \bar{G}(t+s-y)dy = \lambda \int_0^t \bar{G}(u+s)du \end{aligned}$$

e a distribuição conjunta é dada por

$$\begin{aligned} P\{Y(t)=i, Y(t+s)=j\} &= P\{N_1+N_2=i, N_2+N_3=j\} \\ &= \sum_{m=0}^{\min(i,j)} P\{N_2=m, N_1=i-m, N_3=j-m\} \\ &= \sum_{m=0}^{\min(i,j)} P\{N_2=m\}P\{N_1=i-m\}P\{N_3=j-m\}.\square \end{aligned}$$

Exemplo 7. Minimizando o número de encontros.

Supomos que entradas de carros em uma rodovia formam um processo de Poisson com taxa λ. Carros entram em um ponto A e saem em um ponto B. Cada carro que entra na rodovia escolhe ao acaso a sua velocidade e durante todo percurso se mantém com essa velocidade. Supomos que um carro ultrapassa outro sem perda de velocidade e tempo. Supomos que o seu carro entra nesse highway em tempo s e você pode escolher a sua velocidade. Qual velocidade você escolhe para diminuir o número de encontros com outros carros. Encontro é quando um carro te ultrapassa ou você ultrapassa um carro.

Solução. Seja $d = b-a$ distância de highway. Se você escolhe a velocidade v, então o tempo da viagem em highway é igual a $t_0 = d/v$. Outros carros entram de acordo com o processo de Poisson com taxa λ e escolhem a velocidade V de acordo com a distribuição G. O tempo de viagem é uma variável aleatória $T = d/V$. Seja F a distribuição de T. Temos

$$F(t) = P\{T \le t\} = P\{d/V \le t\} = P\{V \ge d/t\} = \bar{G}(d/t).$$

O seu carro entra em instante s e vai sair em $s+t_0$. Se você ultrapassa um carro, significa que ele entrou antes de s e vai sair depois de $s+t_0$. Se um carro vai ultrapassar o seu carro, significa que este carro entrou depois de s e vai sair antes do $s+t_0$. Seja t o tempo de entrada de um carro. Ele encontra o seu carro se o tempo da viagem dele T é tal que

$$\begin{aligned} t+T &> s+t_0, \quad \text{se } t<s, \\ t+T &< s+t_0, \quad \text{se } s<t<s+t_0. \end{aligned}$$

Um carro que entra em instante t vai se encontrar com o seu carro com a probabilidade

$$p(t) = \begin{cases} P\{t+T > s+t_0\} = \bar{F}(s+t_0-t), & \text{se } t<s, \\ P\{t+T < s+t_0\} = F(s+t_0-t), & \text{se } s<t<s+t_0, \\ 0, & \text{se } t > s+t_0. \end{cases}$$

Usando o Teorema 1, o número total de carros que o seu carro encontra tem a distribuição de Poisson com média

$$\begin{aligned} \lambda \int_0^\infty p(t)dt &= \lambda \int_0^s \bar{F}(s+t_0-t)dt + \lambda \int_s^{s+t_0} F(s+t_0-t)dt \\ &= \lambda \int_{t_0}^{s+t_0} \bar{F}(y)dy + \lambda \int_0^{t_0} F(y)dy. \end{aligned}$$

Para minimizar esta média, obtemos

$$\frac{d}{dt_0}\Big\{\lambda \int_0^\infty p(t)dt\Big\} = \lambda\big(\bar{F}(s+t_0) - \bar{F}(t_0) + F(t_0)\big) = 0.$$

Usando que $\bar{F}(s+t_0) \approx 0$, teremos o tempo t_0 tal que

$$F(t_0) - \bar{F}(t_0) = 0 \to F(t_0) - (1-F(t_0)) = 0 \to F(t_0) = 1/2 \to F(d/v_0) = 1/2.$$

Sabendo que $F(d/v_0) = \bar{G}(v_0)$, vemos que a velocidade ótima v_0 é a mediana da distribuição de velocidades $\bar{G}(v_0) = 1/2$. Resumindo, mostramos que o número de encontros com carros é uma variável aleatória com distribuição de Poisson e a média tem seu valor mínimo quando a velocidade escolhida é a mediana de G.

Exercícios domésticos. Exercícios para Lista 5: 5,6,7,9.

1. Seja $N(t)$ um processo de Poisson com intensidade λ. Cada evento vai ser classificado como o evento do tipo I com probabilidade $p(t) = e^{-2t}, \quad t > 0$.
   (a) O número de eventos do tipo I ocorridos durante o tempo $[0, \infty)$ vai ser infinito?
   (b) Qual é a distribuição do número de eventos classificados como eventos do tipo I que ocorrem durante todo o tempo (no itervalo $[0, \infty)$)?
   (c) Qual é a média do número de eventos do tipo I?

2. Chegadas de e-mails em um distribuidor formam um processo de Poisson $N(t)$ com a taxa λ. Cada e-mail vai ser classificado *pesado* se o tamanho dele maior de que 1Mg e *leve* se o tamanho dele menor de que 1 Mg. O tamanho (em Mg) de um e-mail é independente e tem a distribuição exponencial com a intensidade 1.
   (a) Qual é a distribuição de número de e-mails pesados chegados ate o tempo t, se nos sabemos que $N(t) = n$?
   (b) Qual é a distribuição de número de e-mails pesados chegados em em intervalo $(t, t + s)$?
   (c) Qual é a distribuição de número de e-mails pesados chegados em em intervalo $(t, t + s)$, sabendo que $N(t) = n$?

3. Sejam X_1 e X_2 variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição exponencial com intensidade λ. Seja U_1 uma variável independente de X_1, X_2 que assume dois valores 1 e 2 com probabilidades 1/2 e 1/2. Forme a seguinte variável $Y = X_{U_1}$ - com a probabilidade 1/2 dela ser igual a X_1 e com a mesma probabilidade dela ser igual a X_2. Qual é a média de Y?

4. (Exercício 33, [1]) Seja $N(t)$ um Processo de Poisson com a taxa λ. Seja S_n instante de ocorrência de n-ésimo evento. Achar
   (a) $E[S_4]$
   (b) $E[S_4 \mid N(1) = 2]$
   (c) $E[N(4) - N(2) \mid N(1) = 3]$
   (d) $E[S_1 \mid N(2) = 1]$
   (e) $E[S_1 \mid N(3) = k], \; k \geq 2$.

5. (Exercício 9, [1]) X tem a distribuição exponencial com a intensidade λ.
   (a) usando a definição de média condicional achar $E[X \mid X < c]$ onde c é uma constante positiva.
   (b) agora, achar $E[X \mid X < c]$ usando a igualdade
   $$E[X] = E[X \mid X < c]P\{X < c\} + E[X \mid X > c]P\{X > c\}.$$

6. (Exercício 13, [1]) Sejam X_1 e X_2 variáveis exponenciais independentes e identicamente distribuidas com a intensidade μ. Definimos $X_{(1)} = \min(X_1, X_2)$ e $X_{(2)} = \max(X_1, X_2)$. Achar $E[X_{(1)}], \; Var[X_{(1)}], \; E[X_{(2)}], \; Var[X_{(2)}]$.

7. (Exercício 47, [1]) A chegada de pessoas em um ponto de ônibus é um processo de Poisson com a taxa λ. ônibus vai sair em instante t. Seja X o tempo total de espera – soma de tempos de espera de todas as pessoas até pegar o ônibus. Seja $N(t)$ número de chegadas ate o tempo t.
   (a) Achar $E[X \mid N(t)]$
   (b) Mostrar que $Var[X \mid N(t)] = N(t)t^2/12$.
   (c) Achar $Var(X)$

8. Seja $N(t)$ um Processo de Poisson com taxa $\lambda > 0$. Encontre a probabilidade condicional de que hajam m realizações nas primeiras s unidades de tempo, dado que ocorreram n eventos nas primeiras t unidades de tempo, onde $0 \leq m \leq n$ e $0 \leq s \leq t$.

9. Seja $N(t)$ um Processo de Poisson com taxa $\lambda > 0$. Seja T_m o tempo do $m-$ésimo evento. Encontre a Distribuição de T_m. *Dica:* $\{T_m \leq t\} = \{N(t) \geq m\}$.

Referências

[1] S.M.Ross (1997) *Introduction to probability models.*