Lista 4. Processo de Poisson. Definição. Gabarito.

Solução Exercício 2. $\tau = t_2 - t_1 \sim exp(\lambda_1)$, podemos supor sem perda de generalidade que $t_1 = 0$. Assim,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N_2(\tau) = n) &= \int_0^\infty \mathbb{P}(N_2(t) = n \mid \tau = t)\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} dt \;=\; \int_0^\infty \frac{(\lambda_2 t)^n}{n!} e^{-\lambda_2 t}\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} dt \\
&= \frac{\lambda_2^n \lambda_1}{n!} \int_0^\infty t^n e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t} dt \;=\; \frac{\lambda_2^n \lambda_1}{n!} \frac{1}{(\lambda_1+\lambda_2)^n} \int_0^\infty x^n e^{-x} dx \\
&= \frac{\lambda_2^n \lambda_1}{n!} \frac{1}{(\lambda_1+\lambda_2)^n} \cdot n! = \Big(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\Big)^n \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2},\; n = 0, 1, 2, \ldots
\end{aligned}$$

Assim $N_2(\tau)$ tem distribuição geométrica.

Outra solução usando propriedade de falta de memória. Suponhamos de novo que os processos começam de 0. No primeiro instante τ de ocorrência de N_1: se $N_2(\tau) = 0$ significa que τ_2, instante de primeira ocorrência de N_2, é maior de que τ. Assim, lembrando que τ, τ_2 são independentes e $\tau \sim exp(\lambda_1), \tau_2 \sim exp(\lambda_2)$

$$\mathbb{P}(\tau > \tau_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

Se $N_2(\tau) = 0$: $\tau_2 < \tau$, com probabilidade $\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}$ e depois por falta de memória multiplico para probabilidade de $\tau_2 > \tau$:

$$\mathbb{P}(\tau > \tau_2) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

ect... $\square$

Solução Exercício 3. Usando solução do item anterior: sejam $N_1 \sim PP(\lambda_1)$ processo de Poisson de chamadas comerciais e $N_2 \sim PP(\lambda_2)$ processo de Poisson de chamadas não comerciais. Seja τ é tempo de primeira chamada não comercial, $\tau \sim exp(\lambda_2)$. Então, pela exercício anterior temos

$$\mathbb{P}(N_1(\tau) = 5) = \Big(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\Big)^5 \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

$\square$

Solução Exercício 4. Seja $N(t)$ número de veículos que passaram durante intervalo $(0, t]$, $N_1(t) \sim Poi(\lambda t)$. Seja Y número de veículos entrevistados entre esses $N(t)$ veículos. Assim $Y = [N(t)/15]$ em que $[x]$ é a parte inteira de x. Assim,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y = 0) &= \sum_{k=0}^{14} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \\
\mathbb{P}(Y = 1) &= \sum_{k=15}^{29} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \\
&\ldots \\
\mathbb{P}(Y = m) &= \sum_{k=15m}^{15(m+1)-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \\
&\ldots
\end{aligned}$$

Solução Exercício 6. $N(t) \sim Poi(\lambda t)$ e $T \sim U[9, 11]$. Acharemos $\mathbb{E}(N(T))$ pelo lei das expectativas iteradas:

$$\mathbb{E}(N(T)) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(N(T) \mid T)) = \int_9^{11} \lambda t \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{\lambda t^2}{4}\Big|_9^{11} = 10\lambda.$$

Assim, $\mathbb{E}(N(T)) = 30$, em média o ônibus vai pegar 30 pessoas. Acharemos $\mathbb{V}ar(N(T))$. Usaremos mesmo lei das expectativas iteradas:

$$\mathbb{V}ar(N(T)) = \mathbb{E}(\mathbb{V}ar(N(T) \mid T)) + \mathbb{V}ar(\mathbb{E}(N(T) \mid T)).$$

Observe que para distribuição de Poisson $\mathbb{E}(N(T) \mid T) = \mathbb{V}ar(N(T) \mid T) = \lambda T$, assim

$$\mathbb{V}ar(N(T)) = \mathbb{E}(\lambda T) + \mathbb{V}ar(\lambda T) = \lambda \cdot 10 + \lambda^2 \frac{(11-9)^2}{12} = \lambda(10 + \lambda/3)$$

Assim a variância é $\mathbb{V}ar(N(T)) = 33$.

Solução Exercício 12. $N \sim PP(\lambda = 25)$ com probabilidade 0.8 marcamos a chegada de mulher e com 0.2 a chegada de um homen. A chagada de homens forma processo de Poisson com a taxa $25 \cdot 0.2 = 5$ homens por hora: $N_h \sim PP(5)$. Assim, temos que calcular

$$\mathbb{P}(N(15\text{min}) = 0) = \mathbb{P}(N(1/4\text{horas}) = 0) = \exp(-5 \cdot \frac{1}{4}) \approx 0.29.$$