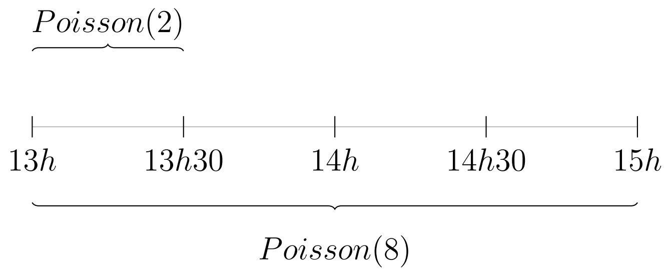
Lista 4 - MAE0499 Processos Estocásticos. Gabarito[1]

Exercício 1

Seja $N(\cdot)$ processo de Poisson que modela a chegada de clientes em uma loja. Supomos que a taxa é de 2 pessoas por meia-hora.

Solução:

(a) Qual é o número médio de clientes que chegam de 13 horas até 15 horas?



Pela propriedade de processos de Poisson obtemos que a distribuição de clientes que chegam entre 13 horas e 15 horas é uma Poisson cuja média é diretamente proporcional do tamanho do intervalo. No nosso caso o tamanho do intervalo é 4, período de 2 horas.

Portanto temos uma Poisson(8), ou seja, a média de clientes que chegam neste intervalo é 8.

(b) Qual é a probabilidade de que nenhum cliente chega durante uma hora, digamos das 13 até 14 horas?

A probabilidade de nenhum cliente chegar durante uma hora, que tem distribuição Poisson(4), é dada pela seguinte expressão:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(N=0) &= \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^0}{0!} \\
&= e^{-4}
\end{aligned}
$$

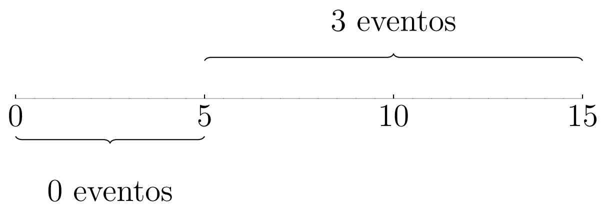
[1]Feito pelo monitor da turma Bruno de Assis Silva e verificado pelo Prof. A.Iambartsev, Abril, 2020

Exercício 2

Seja $N(\cdot)$ processo de Poisson com taxa $\lambda = 1$. Achar:

Solução:

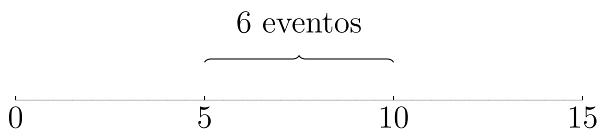
(a) $P(N(5) = 0, N(15) - N(10) = 3)$



Como os incrementos são independentes então podemos encontrar a solução da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(N(5) = 0, N(15) - N(10) = 3) &= \mathbb{P}(N(5) = 0) \cdot \mathbb{P}(N(15) - N(10) = 3) \\
&= \frac{e^{-5} \cdot 5^0}{0!} \cdot \frac{e^{-10} \cdot 10^3}{3!} \\
&= 0.00004
\end{aligned}
$$

(b) $P(N(15) = 10, N(10) - N(5) = 6)$



Como os incrementos são independentes então podemos encontrar a solução da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(N(15) = 10, N(10) - N(5) = 6) &= \mathbb{P}(N(10) - N(5) = 6) \cdot \mathbb{P}(N(5) + (N(15) - N(10)) = 4) \\
&= \frac{e^{-5} \cdot 5^6}{6!} \cdot \frac{e^{-10} \cdot 10^4}{4!} \\
&= 0.002
\end{aligned}
$$

Exercício 3

Seja $N(\cdot)$ processo de Poisson que modela o processo de sinistros com taxa de 2 sinistros por um dia. Cada sinistro pode ser um de dois tipos: tipo 1 e 2. A proporção de sinistros do tipo 1 é de 30% e do segundo tipo, consequentemente, é 70%. Sabe-se que durante uma semana ocorreu 10 sinistros.

Solução:

(a) Qual é a distribuição de sinistros do tipo 1 (durante essa semana)?

Sabendo, que temos 10 sinistros, e cada um com a probabilidade 0.3 pode ser um sinistro do tipo 1, isso significa que a distribuição de número de sinistros do tipo 1 nesta semana tem a distribuição binomial com probabilidade de "sucesso"$p = 0.3$. O que também pode ser conformada pelo calculo direto:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = x|X + Y = 10) &= \frac{\mathbb{P}(X = x, X + Y = 10)}{\mathbb{P}(Z = 10)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(X = x, Y = 10 - x)}{\mathbb{P}(Z = 10)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(X = x) \cdot \mathbb{P}(Y = 10 - x)}{\mathbb{P}(Z = 10)} \\
&= \frac{\frac{e^{-4.2} \cdot 4.2^x}{x!} \cdot \frac{e^{-9.8} \cdot 9.8^{10-x}}{(10-x)!}}{\frac{e^{-14} \cdot 14^{10}}{10!}} \\
&= \frac{10!}{x!(10-x)!} \left(\frac{4.2}{14}\right)^x \left(\frac{9.8}{14}\right)^{10-x} \\
&= \binom{10}{x} \cdot 0.3^x \cdot 0.7^{(10-x)}
\end{aligned}$$

Portanto a distribuição de sinistros do tipo 1 é Binomial(10,0.3).

(a) Qual é a probabilidade de que durante essa semana o número de sinistros do tipo 1 é igual a número de sinistros do tipo 2?

Isto é na equivalente a calcular a probabilidade de dentre os 10 sinistros, 5 deles serem do tipo 1.

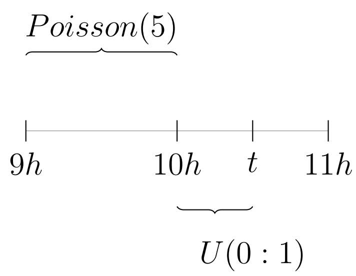
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = 5) &= \binom{10}{5} \cdot 0.3^5 \cdot 0.7^{(10-5)} \\
&= 0.10
\end{aligned}$$

Exercício 4

Em teoria de filas existe um modelo quando número de atendentes é infinito, isso significa que qualquer cliente quando chega já tem um atendente. Supomos que funcione o modelo da fila "em pacotes": clientes chegam de acordo com o processo de Poisson com taxa 5 pessoas por hora e formam uma fila na frente de em "estabelecimento"que abre suas portas em um instante aleatório T neste instante todos clientes vão ser atendidos. Supondo que T tem distribuição uniforme em [10, 11] horas, e supondo que o fluxo de clientes começa as 9 horas

Solução:

(a) calcule a média de clientes que vão entrar no estabelecimento em instante T.



Como os incrementos são independentes, podemos separar em duas situações:

1. Número esperado de clientes entre 9h e 10h;
2. Número esperado de clientes entre 10h e T.

Como no caso um temos um processo de poisson com taxa 5, então o número esperado de clientes é $\mathbb{E}(N(10) - N(9)) = 5$.

No caso 2:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(N(T)) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(N(T) \mid T)) \\
&= \mathbb{E}(5T) \\
&= 5 \cdot \mathbb{E}(T) \\
&= 5 \cdot \frac{1}{2} \\
&= 2.5
\end{aligned}$$

Portanto a média de clientes que vão entrar no estabelecimento é 5+2.5 = 7.5 .

(b) calcule a probabilidade de que até instante T nenhum cliente chegou.

Como os incrementos são independentes, podemos escrever a probabilidade da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N(T) - N(9) = 0) &= \mathbb{P}(N(10) - N(9) = 0) \cdot \mathbb{P}(N(T) - N(10) = 0) \\
&= e^{-5} \int_{10}^{11} \mathbb{P}(N(T) - N(10) = 0 \mid T = t) \cdot 1dt \\
&= e^{-5} \int_{10}^{11} \frac{e^{-5(t-10)}(5(t-10))^0}{0!} dt = e^{-5} \int_0^1 e^{-5s} ds \\
&= \frac{e^{-5}}{5} \left(1 - e^{-5}\right)
\end{aligned}$$

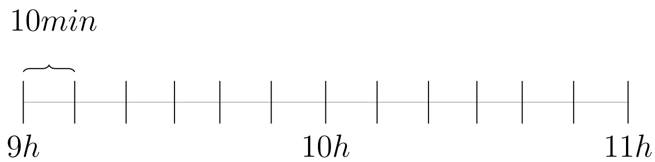
Exercício 5

Em um ponto de atendimento chegam as pessoas. A chegada deles vamos modelar como o processo de Poisson com taxa 1 chegada por 10 minutos. No instante de chegada temos uma pessoa com probabilidade 0.7 e um casal (duas pessoas) com probabilidade 0.2 e três amigos bêbados com probabilidade 0.1. Supomos que o fluxo das pessoas começa as 9 horas.

Solução:

(a) calcule a média de clientes que vão chegar durante das 9 horas até 11 horas.

Note que temos 3 situações distintas, a chegada de uma pessoa, X_1, é modelada por um processo de poisson com taxa 0.7 chegada por 10 minutos, a chegada de um casal, X_2, por um processo de poisson de taxa 0.2 chegada por 10 minutos e 3 pessoas, X_3, um processo de poisson com taxa 0.1 chegada por 10 minutos. Então o número total de pessoas que chegam num dado intervalo de tempo t é descrito da seguinte forma $N(t) = X_1(t) + 2 \cdot X_2(t) + 3 \cdot X_3(t)$.



$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(N(12)) &= \mathbb{E}(X_1(12) + 2 \cdot X_2(12) + 3 \cdot X_3(12)) \\
&= \mathbb{E}(X_1(12)) + 2\mathbb{E}(X_2(12)) + 3\mathbb{E}(X_3(12)) \\
&= 12 \cdot 0.7 + 2 \cdot 12 \cdot 0.2 + 3 \cdot 12 \cdot 0.1 \\
&= 16.8
\end{aligned}$$

(b) sabendo que nenhum bêbado chega durante uma hora das 9 horas até 10 horas, calcule a média de clientes que vão chegar durante das 9 horas até 11 horas.

Podemos separar em dois casos, o número médio de pessoas que chegam entre 9 e 10 horas e durante 10 e 11 horas.

Durante o intervalo de tempo entre 9 e 10 horas, o número médio de pessoas é:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(N(6)|X_3 = 0) &= \mathbb{E}(X_1(6) + 2 \cdot X_2(6) + 3 \cdot X_3(6) \mid X_3(6) = 0) \\
&= \mathbb{E}(X_1(6)) + 2 \cdot \mathbb{E}(X_2(6)) \\
&= 6 \cdot 0.7 + 2 \cdot 6 \cdot 0.2 \\
&= 6.6
\end{aligned}$$

Durante o intervalo de tempo entre 10 e 11 horas, o número médio de pessoas é:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(N(12) - N(6)) &= \mathbb{E}((X_1(12) - X_1(6)) + 2 \cdot (X_2(12) - X_2(6)) + 3 \cdot (X_3(12) - X_3(6))) \\
&= 6 \cdot 0.7 + 2 \cdot 6 \cdot 0.2 + 3 \cdot 6 \cdot 0.1 \\
&= 8.4
\end{aligned}$$

Portanto a média de clientes é $6.6 + 8.4 = 15$.