Aula 4. Processo de Poisson. Definição.

Um processo estocástico é um conjunto de variáveis aletórias $\xi(t)$ que depende de um parâmetro t. O parâmetro t é interpretado como o tempo. Quando o tempo t é fixo, o objeto $\xi(t)$ trata-se simplesmente como uma variável aleatória. Qualquer sequência de variáveis aleatórias (por exemplo, $X_1, X_2, \cdots$, onde cada X_i é uma v.a. é um processo estocástico). Como um exemplo "simples", consideramos o *processo de contagem.* O processo $N(t)$ chama-se de contagem, se ele "conta" quantos eventos ocorreram durante o intervalo de tempo $(0, t]$.

Definição 1 *Um processo de contagem $N(t)$ é um processo de Poisson com intensidade $\lambda, \lambda > 0$, se*

1. $N(0) = 0$, *i.e., em instante inicial, nenhum evento ocorreu;*
2. $N(t+s) - N(s)$ *não depende do* $N(s)$ *para quaisquer* $t, s \leq 0$, *i.e., o processo tem incrementos independentes;*
3. $P\{N(t+s) - N(s) = n\} = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$, $n = 0, 1, \ldots$, *i.e., o número de eventos que ocorreram durante o tempo t tem a distribuição de Poisson com média λt.*

Notamos que o terceiro item da Definição 1 sigifica que os incrementos do processo de Poisson são estacionários: para quaisquer s_1, s_2, t e n $P\{N(s_1+t) - N(s_1) = n\} = P\{N(s_2+t) - N(s_2) = n\}$. Em particular, se tomarmos $s_3 = 0$, teremos então: $P\{N(s_3+t) - N(s_3) = n\} = P\{N(t) - N(0) = n\} = P\{N(t) = n\}$

Ex. 1. Seja $N(t)$ um processo de Poisson com intensidade λ. Qual é a média do número de eventos que ocorreram até o tempo t?

Solução. Pelo item primeiro da definição, temos que $N(t) = N(t) - N(0)$. Pelo terceiro item, temos que a distribuição de diferença $N(t) - N(0)$ é de Poisson com média λt. $\square$

Existe uma outra definição de processo de Poisson.

Definição 2 *Um processo $\{N(t), t \geq 0\}$ é um processo de Poisson com intensidade $\lambda, \lambda > 0$, se*

1. $N(0) = 0$;
2. *os incrementos dele são independentes e estacionários;*
3. $P\{N(h) = 1\} = \lambda h + o(h)$;
4. $P\{N(h) \geq 2\} = o(h)$.

Ex. 2. As definições 1 e 2 são equivalentes.

Solução. Vamos mostrar primeiro que da Definição 2 segue a Definição 1. Seja $P_n(t) = P\{N(t) = n\}$. Obtemos a equação diferencial para $P_0(t)$ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} P_0(t+h) &= P\{N(t+h) = 0\} = P\{N(t) = 0, N(t+h) - N(t) = 0\} \\ &= P\{N(t) = 0\}P\{N(t+h) - N(t) = 0\} = P_0(t)[1 - \lambda h + o(h)]. \end{aligned}$$

Logo, obtemos que

$$P_0'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{P_0(t+h) - P_0(t)}{h} = \lim_{h \to 0} \Big(-\lambda P_0(t) + \frac{o(h)}{h} \Big) = -\lambda P_0(t).$$

A solução desta equação é $P_0(t) = Ce^{-\lambda t}$. Usando a condição inicial $P_0(0) = 1$, obtemos a constante $C = 1$ e

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}. \tag{1}$$

De forma similar, para $n > 0$, obtemos:

$$\begin{aligned} P_n(t+h) &= P_n(t)P\{N(t+h) - N(t) = 0\} + P_{n-1}(t)P\{N(t+h) - N(t) = 1\} + \\ &\quad + \sum_{k=2}^{n} P_{n-k}(t)P\{N(t+h) - N(t) = k\} = \\ &= P_n(t)[1 - \lambda h + o(h)] + P_{n-1}(t)[\lambda h + o(h)] + \sum_{k=2}^{n} P_{n-k}(t)o(h) \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} P_n'(t) &= \lim_{h\to 0}\frac{P_n(t+h)-P_n(t)}{h} = -\lambda P_n(t)+\lambda P_{n-1}(t) \\ &+ \lim_{h\to 0}\Big(P_n(t)\frac{o(h)}{h}+P_{n-1}(t)\frac{o(h)}{h}+\sum_{k=2}^{n}P_{n-k}(t)\frac{o(h)}{h}\Big) = -\lambda P_n(t)+\lambda P_{n-1}(t). \end{aligned}$$

A equação obtida pode ser reescrita da seguinte forma:

$$e^{\lambda t}[P_n'(t)+\lambda P_n(t)] = \lambda e^{\lambda t}P_{n-1}(t) \quad \text{ou} \quad \frac{d}{dt}(e^{\lambda t}P_n(t)) = \lambda e^{\lambda t}P_{n-1}(t). \tag{2}$$

Usando indução matemática, vamos mostrar que a solução do sistema de equações (2) tem a solução $P_n(t) = e^{-\lambda t}(\lambda t)^n/n!$. Usando (2) e suposição da indução, temos

$$\frac{d}{dt}(e^{\lambda t}P_n(t)) = \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} \quad \text{ou} \quad e^{\lambda t}P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!}+C.$$

Pela condição inicial $P_0(0)=0$, temos que $C=0$. □

Ex. 3. Seja $N(t)$ um processo de Poisson com intensidade λ. Seja T_1 o tempo de ocorrência do primeiro evento, e seja $T_n, n=1,2,\dots,$ o intervalo temporal entre $(n-1)$-ésimo e o n-ésimo eventos. (Se $T_1=5$ e $T_2=10$, então os tempos de ocorrência do primeiro evento e do segundo evento são 5 e 15, respectivamente). Prove que os T_n's são independentes e identicamente distribuídos com a distribuição exponencial com média $1/\lambda$.

Solução. Provamos primeiro que o instante T_1 tem a distribuição exponencial com parâmetro λ. Para isso, notamos que o evento $\{T_1>t\}$ ocorre se e somente se nenhum evento do processo de Poisson ocorreu durante o intervalo $[0,t]$, assim temos:

$$P\{T_1>t\} = P\{N(t)=0\} = e^{-\lambda t}.$$

O que prova que T_1 tem distribuição exponencial com o parâmetro λ. Agora, para obter a distribuição de T_2, notamos que a probabilidade desejada pode ser representada da seguinte forma:

$$P\{T_2>t\} = E[P\{T_2>t \mid T_1\}]. \tag{3}$$

Logo

$$\begin{aligned} P\{T_2>t\mid T_1=s\} &= P\{0 \text{ eventos ocorreram durante tempo } (s,s+t] \mid T_1=s\} \\ &= P\{0 \text{ eventos ocorreram durante tempo } (s,s+t]\} = e^{-\lambda t} \end{aligned} \tag{4}$$

em que as últimas igualdades são conseqüências de independência e estacionaridade dos incrementos do processo de Poisson. Usando (4), logo calculamos (3):

$$\begin{aligned} P\{T_2>t\} &= E[P\{T_2>t\mid T_1\}] = \int_0^\infty P\{T_2>t\mid T_1=s\}\lambda e^{-\lambda s}ds \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t}\lambda e^{-\lambda s}ds = e^{-\lambda t}\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda s}ds = e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

□

O fato dos tempos entre as ocorrências de um processo de Poisson ter distribuição exponencial não pode nos surpreender. A suposição de que o processo possui os incrementos independentes faz o processo em cada incremento "esquecer" o passado, em outras palavras, o processo possui a propriedade de "falta da memória".

A outra variável de interesse é saber quando acontece o n-ésimo evento S_n. Temos a seguinte representação para o tempo de espera $S_n : S_n = T_1+T_2+\cdots+T_n$. Sabemos que a distribuição da soma de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição exponencial com intensidade λ é gama com parâmetros λ e n. A densidade $f_{S_n}(t)$ desta distribuição fica dada por

$$f_{S_n}(t) = \lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}, \quad \lambda>0. \tag{5}$$

Podemos obter a densidade (5) através de outro raciocínio. A função de distribuição acumulada é a probabilidade de $\{S_n\le t\}$, que significa que pelo menos n eventos ocorreram até o tempo t. Assim, obtemos a fórmula para função de distribuição acumulada:

$$F_{S_n}(t) = P\{S_n\le t\} = P\{N(t)\ge n\} = \sum_{k=n}^{\infty}P\{N(t)=k\} = \sum_{k=n}^{\infty}e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}.$$

Logo

$$\begin{aligned} f_{S_n}(t) &= (F_{S_n}(t))' = \sum_{k=n}^{\infty}\Big(e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\Big)' = \sum_{k=n}^{\infty}\Big(-\lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!} + \lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}\Big) \\ &= \lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{k=n+1}^{\infty}\lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} - \sum_{k=n}^{\infty}\lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}. \end{aligned}$$

Ex. 4. Suponha que a chegada de imigrantes em um país forma um processo de Poisson com intensidade $\lambda = 1$ pessoa por um dia.

(a) Qual é o tempo médio da chegada do décimo imigrante?

(b) Qual é a probabilidade de que o tempo entre o nono imigrante e o décimo fique maior do que dois dias?

Solução. (a) $E[S_{10}] = 10\frac{1}{\lambda} = 10$ dias;

(b) $P\{T_{10} > 2\} = e^{-\lambda 2} = e^{-2} = 0.133...$

□

Consideramos um processo de Poisson com intensidade λ. Suponha que em cada instante de ocorrência do evento com a probabilidade p vamos classificar o evento como o evento do tipo I ou o evento do tipo II com probabilidade $1-p$. Por exemplo, as pessoas que entram numa loja formam um processo de Poisson com intensidade λ, podemos supor que a pessoa que entra em loja pode ser um homem com a probabilidade 50% ou uma mulher com a mesma probabilidade.

Sejam $N_1(t)$ e $N_2(t)$ o número de ocorrências dos eventos do tipo I e do tipo II, respectivamente, que ocorreram até o tempo t.

Ex. 5. Prove que $\{N_1(t), t \geq 0\}$ e $\{N_2(t), t \geq 0\}$ são processos de Poisson com intensidades $p\lambda$ e $(1-p)\lambda$, respectivamente. Os processos são independentes um do outro?

Solução. Calculamos a probabilidade de que ocorra n eventos do tipo I e m eventos do tipo II durante o tempo $[0,t]$:

$$\begin{aligned} P\{N_1(t)=n, N_2(t)=m\} &= P\{N_1(t)=n, N_2(t)=m, N(t)=n+m\} \\ &= P\{N_1(t)=n, N_2(t)=m \mid N(t)=n+m\}P\{N(t)=n+m\} \\ &= P\{N_1(t)=n, N_2(t)=m \mid N(t)=n+m\}e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n+m}}{(n+m)!} \\ &= \binom{n+m}{n}p^n(1-p)^m e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n+m}}{(n+m)!} \\ &= e^{-\lambda t p}\frac{(\lambda t p)^n}{n!}e^{-\lambda t(1-p)}\frac{(\lambda t(1-p))^m}{m!} \\ P\{N_1(t)=n\} &= \sum_{m=0}^{\infty}P\{N_1(t)=n, N_2(t)=m\} \\ &= e^{-\lambda t p}\frac{(\lambda t p)^n}{n!}\sum_{m=0}^{\infty}e^{-\lambda t(1-p)}\frac{(\lambda t(1-p))^m}{m!} = e^{-\lambda t p}\frac{(\lambda t p)^n}{n!}. \end{aligned}$$

As últimas contas mostram que o $N_1(t)$ forma um processo de Poisson com intensidade λp enquanto $N_2(t)$ forma um processo de Poisson com intensidade $(1-p)\lambda$. A independência segue direto da observação de que

$$P\{N_1(t)=n, N_2(t)=m\} = P\{N_1(t)=n\}P\{N_2(t)=m\}.$$

□

Ex. 6. Suponha que a chegada dos imigrantes em um país formam um processo de Poisson com intensidade de dez pessoas por uma semana. O novo imigrante é descendente Europeu com a probabilidade 1/12. Qual é a probabilidade de que nenhum descendente Europeu chegue durante um mês (suponha que um mês tem quatro semanas).

Solução. Pelo resultado de Exercício 2 os descendentes europeus formam um processo de Poisson com intensidade $\frac{1}{12}\cdot 10$ pessoas por semana. Isso significa que o número de descendentes europeus durante 4 semanas tem distribuição de Poisson com média $4\cdot\frac{1}{12}\cdot 10 = \frac{10}{3}$. Então, a probabilidade desejada é $e^{-10/3}$. □

Exercícios domésticos. Exercícios para Lista: 2,3,4,6,12.

1. Sejam X_1 e X_2 duas variáveis aleatórias independentes assumindo valores inteiros não-negativos. Suponha que X_1 e $X_1 + X_2$ tem distribuição de Poisson com parâmetros λ_1 e λ_2, respectivamente. Mostre que a distribuição de X_2 é de Poisson com parâmetro $\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$.

2. sejam $N_1(t)$ e $N_2(t)$ dois processos de Poisson independentes com taxas λ_1 e λ_2, respectivamente. Sejam t_1 e t_2 $(t_1 < t_2)$ dois instantes que correspondem a ocorrências sucessivas do processo $N_1(t)$. Determine a distribuição de probabilidade da variável aleatória $Y = N_2(t_2) - N_2(t_1)$.

3. Existem dois tipos de chamadas que chegam a um posto telefônico. O primeiro tipo requer informações comerciais e o do segundo tipo não. Suponha que as chegadas desses dois tipos de chamadas podem ser representadas por processos de Poisson independentes com as taxas λ_1 e λ_2. Qual é a probabilidade de que entre duas chamadas não comerciais cheguem cinco chamadas comerciais?

4. Numa pesquisa origem-destino realizada numa rodovia decide-se entrevistar cada 15^o veículo que passa. Se, no período da entrevista, os carros que passam na rodovia seguem um processo de Poisson com taxa λ, determine a distribuição de probabilidades do número de veículos entrevistados no intervalo $[0, t)$.

5. $N_1(t)$ e $N_2(t)$ são dois processos de Poisson independentes com taxas λ_1 e λ_2, respectivamente. Qual é a probabilidade de que a 1^a ocorrência do processo $N_1(t)$ ocorra antes da 1^a ocorrência de $N_2(t)$?

6. Passageiros chegam a um ponto final de ônibus segundo um processo de Poisson $N(t)$ com média de 3 por minuto. Suponha que um ônibus partiu no instante inicial e não deixou nenhum passageiro na fila. Seja T o tempo que decorre para chegar o próximo ônibus e suponha que T é independente do processo e tem distribuição uniforme no intervalo $(9, 11)$. Calcule a média e a variância de $N(T)$.

7. Seja $N(t)$ um processo de Poisson com média de 3 ocorrências por minuto. Considere 5 ocorrências sucessivas desse processo e determine a probabilidade de que nenhum intervalo entre elas seja superior a 30 segundos.

8. Seja $\{N(t), t \geq 0\}$ um processo de Poisson com taxa λ. Para $h > 0$, fixado, determine a distribuição de probabilidades de $N(t)$ dado $N(t + h) = n$.

9. Os carros passam na "Ayrton Senna" por um posto de polícia rodoviária. Os carros leves "formam" um processo de Poisson $N_1(t)$ com intensidade $\lambda_1 = 2$ carros por um minuto. Os caminhões "formam" um processo de Poisson $N_2(t)$ com intensidade de $\lambda_2 = 1$ carro por um minuto. Consideramos também um processo de Poisson $N(t)$ de carros (tanto carros leves como caminhões) que passam pelo posto de polícia.

   (a) Notamos que o processo $N(t)$ pode ser representado como a soma de processos $N_1(t)$ e $N_2(t)$. Prove que o processo $N(t)$ é um processo de Poisson com intensidade $\lambda_1 + \lambda_2$.

   (b) Qual é a probabilidade de que nenhum carro passe pelo posto de polícia de 10.00 horas até 10.15?

10. Seja $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ um processo de Poisson com taxa λ=15. Calcule:

    (a) $P\{N(6) = 9\}$

    (b) $P\{N(6) = 9, N(20) = 13, N(56) = 27\}$

11. Sejam 2 processos de Poisson, tendo taxas $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 3$ respectivamente. Suponha que vamos analisar o valor de cada um deles nos intervalos de tempo $[s_1, t]$ e $[s_2, t]$, respectivamente. Calcule os valores de s_1 e s_2 para que os dois processos tenham contado exatamente o mesmo número de ocorrências.

12. O fluxo de consumidores numa loja é descrito por um processo de Poisson com taxa de 25 consumidores por hora. Sabe-se que a proporção de consumidores do sexo feminino é de 80%. Qual é a probabilidade que nenhum consumidor homem entre nessa loja durante um intervalo de 15 minutos?

Referências

[1] S.M.Ross (1997) *Introduction to probability models.* Chapter 5.3.