Lista 3. Distribuição Exponencial. Gabarito.

Solução Exercício 2. Tempo (em anos) de funcionamento do radio $X \sim exp(1/10)$: pelo falta de memória

$$\mathbb{P}(X > 10 + 10 \mid X > 10) = \mathbb{P}(X > 10) = \exp(-10/10) = e^{-1}.$$

$\square$

Solução Exercício 3. Tempo (em horas) de funcionamento do DVD $X \sim exp(\lambda), \lambda = 1/1000$, tempo de funcionamento do microfone $Y \sim exp(\mu), \mu = 1/500$. Precisamos achar probabilidade

$$\mathbb{P}(Y > X) = \int_0^\infty \mathbb{P}(Y > x)\lambda e^{-\lambda x} dx = \int_0^\infty e^{-\mu x}\lambda e^{-\lambda y} dy = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} = \frac{1/1000}{1/1000 + 1/500} = \frac{1}{3}.$$

$\square$

Solução Exercício 4. Então temos $X_i \sim exp(\lambda_i), i = 1, 2, 3.$

a)

$$\mathbb{P}(\max(X_1, X_2, X_3) \leq x) = \prod_{i=1}^{2} \mathbb{P}(X_i \leq x) = (1 - e^{-\lambda_1 x})(1 - e^{-\lambda_2 x})(1 - e^{-\lambda_3 x}).$$

b) Para achar distribuição cumulativa do mínimo acharemos complementar

$$\mathbb{P}(\min(X_1, X_2, X_3) > x) = e^{-\lambda_1 x} e^{-\lambda_2 x} e^{-\lambda_3 x} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)x}.$$

então

$$\mathbb{P}(\min(X_1, X_2, X_3) \leq x) = 1 - e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)x}.$$

c) Seja $Z = \max(X_1, X_2, X_3)$, então pelo item anterior conhecemos cumulativa que da densidade

$$\begin{aligned}
&f_Z(x) = \frac{d}{dx}(1 - e^{-\lambda_1 x})(1 - e^{-\lambda_2 x})(1 - e^{-\lambda_3 x}) = \\
&= \lambda_1 e^{-\lambda_1 x}(1 - e^{-\lambda_2 x})(1 - e^{-\lambda_3 x}) + \lambda_2 e^{-\lambda_2 x}(1 - e^{-\lambda_1 x})(1 - e^{-\lambda_3 x}) + \lambda_3 e^{-\lambda_3 x}(1 - e^{-\lambda_1 x})(1 - e^{-\lambda_2 x}) \\
&= \quad \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} - \lambda_1 e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x} - \lambda_1 e^{-(\lambda_1+\lambda_3)x} + \lambda_1 e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)x} \\
&\ \ + \lambda_2 e^{-\lambda_2 x} - \lambda_2 e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x} - \lambda_2 e^{-(\lambda_2+\lambda_3)x} + \lambda_2 e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)x} \\
&\ \ + \lambda_3 e^{-\lambda_3 x} - \lambda_3 e^{-(\lambda_1+\lambda_3)x} - \lambda_3 e^{-(\lambda_2+\lambda_3)x} + \lambda_3 e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)x} \\
&= \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} + \lambda_2 e^{-\lambda_2 x} + \lambda_3 e^{-\lambda_3 x} \\
&\ \ -(\lambda_1 + \lambda_2)e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x} - (\lambda_1 + \lambda_3)e^{-(\lambda_1+\lambda_3)x} - (\lambda_2 + \lambda_3)e^{-(\lambda_2+\lambda_3)x} + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)x}
\end{aligned}$$

Assim,

$$\mathbb{E}(Z) = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3} - \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_3} - \frac{1}{\lambda_2 + \lambda_3} + \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}$$

$\square$

Solução Exercício 5. Temos n v. aleatórias independentes exponenciais, $X_i \sim exp(\lambda_i), i = 1, \ldots, n$. A probabilidade de que X_1 é menor de que todas as outras achamos de seguinte maneira. Seja $Y = \min(X_2, X_3, \ldots, X_n)$. Então a probabilidade desejada pode ser escrita como $\mathbb{P}(X < Y)$, e ainda mais, sabemos que $Y \sim exp(\lambda)$, em que $\lambda = \lambda_2 + \lambda_3 + \cdots + \lambda_n$, assim pelos exercícios anteriores temos

$$\mathbb{P}(X_1 < Y) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n}.$$

$\square$