Lista 3 - MAE0499 Processos Estocásticos. Gabarito[1]

Exercício 1

Seja $X \sim exp(\lambda)$ e $Y \sim exp(\mu)$. Supomos que X, Y são independentes. Achar

Solução:

(a) a densidade e distribuição acumulada de max(X,Y);

$$\begin{aligned} F_{max}(z) &= \mathbb{P}(max(X,Y) \leq z) \\ &= \mathbb{P}(X \leq z) \cdot \mathbb{P}(Y \leq z) \\ &= (1 - e^{-\lambda z}) \cdot (1 - e^{-\mu z}) \end{aligned}$$

Portanto a função de distribuição de $max(X,Y)$ é $F_{max}(z) = (1 - e^{-\lambda z}) \cdot (1 - e^{-\mu z})$

$$\begin{aligned} f_{max}(z) &= \frac{d}{dz} F_{max}(z) \\ &= \frac{d}{dz}(1 - e^{-\mu z} - e^{-\lambda z} + e^{-(\lambda+\mu)z}) \\ &= \mu e^{-\mu z} + \lambda e^{-\lambda z} - (\lambda + \mu) e^{-(\lambda+\mu)z} \end{aligned}$$

Portanto a função densidade de $max(X,Y)$ é $f_{max}(z) = \mu e^{-\mu z} + \lambda e^{-\lambda z} - (\lambda + \mu) e^{-(\lambda+\mu)z}$

(b) a densidade e distribuição acumulada de min(X,Y);

$$\begin{aligned} F_{min}(z) &= \mathbb{P}(\min(X,Y) \leq z) \\ &= 1 - \mathbb{P}(\min(X,Y) \geq z) \\ &= 1 - (\mathbb{P}(X \geq z) \cdot \mathbb{P}(Y \geq z)) \\ &= 1 - (e^{-\lambda z} \cdot e^{-\mu z}) \\ &= 1 - e^{-(\lambda+\mu)z} \end{aligned}$$

Portanto a função de distribuição de $\min(X,Y)$ é $F_{min}(z) = 1 - e^{-(\lambda+\mu)z}$

$$\begin{aligned} f_{min}(z) &= \frac{d}{dz} F_{min}(z) \\ &= (\lambda + \mu) \cdot e^{-(\lambda+\mu)z} \end{aligned}$$

Portanto a função densidade de $\min(X,Y)$ é $f_{min}(z) = (\lambda + \mu) \cdot e^{-(\lambda+\mu)z}$

[1] Feito pelo monitor da turma Bruno de Assis Silva e verificado pelo Prof. A.Iambartsev, Maio, 2020

(c) a densidade de $Z = \max(X,Y) - \min(X,Y)$

$$\begin{aligned}
\overline{F}_{max-min}(z) &= \mathbb{P}(\max(X,Y) - \min(X,Y) > z) \\
&= \mathbb{P}(\max(X,Y) - \min(X,Y) > z, Y > X) + \mathbb{P}(\max(X,Y) - \min(X,Y) > z, X > Y) \\
&= \int_0^\infty \mathbb{P}(Y > z + x | X = x) \cdot f_X(x)dx + \int_0^\infty \mathbb{P}(X > z + y | Y = y) \cdot f_Y(y)dy \\
&= \int_0^\infty e^{-\mu(z+x)} \cdot \lambda e^{-\lambda x}dx + \int_0^\infty e^{-\lambda(z+y)} \cdot \mu e^{-\mu y}dy \\
&= \frac{\lambda e^{-\mu z}}{(\lambda+\mu)} \int_0^\infty (\lambda+\mu)e^{-(\lambda+\mu)x}dx + \frac{\mu e^{-\lambda z}}{(\lambda+\mu)} \int_0^\infty (\lambda+\mu)e^{-(\lambda+\mu)y}dy \\
&= \frac{\lambda e^{-\mu z} + \mu e^{-\lambda z}}{(\lambda+\mu)},
\end{aligned}$$

então,

$$F_{max-min}(z) = \begin{cases} 1 - \frac{\lambda e^{-\mu z} + \mu e^{-\lambda z}}{(\lambda+\mu)}, & \text{se } z > 0 \\ 0, & \text{se } z \leq 0. \end{cases}$$

Portanto a densidade de Z é :

$$\begin{aligned}
f_{max-min}(z) &= \frac{d}{dz} F_{max-min}(z) \\
&= \frac{d}{dz}\left(1 - \frac{\lambda e^{-\mu z} + \mu e^{-\lambda z}}{(\lambda+\mu)}\right) \\
&= \frac{\lambda\mu \cdot (e^{-\mu z} + e^{-\lambda z})}{(\lambda+\mu)}
\end{aligned}$$

Exercício 2

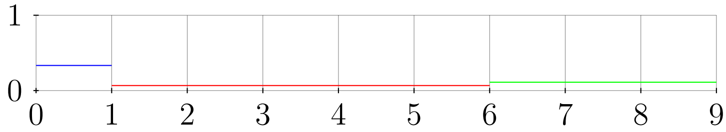
Seja X o tempo de vida útil de uma máquina com a densidade seguinte

$$f(x,y) = \begin{cases} 1/3, & \text{se } x \leq 1 \text{ ano;} \\ 1/15, & \text{se } x \in (1 \text{ ano,} 6 \text{ anos];} \\ 1/9, & \text{se } x \in (6 \text{ anos, } 9 \text{ anos];} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Interpreta-se que, duranteo primeiro ano a máquina está em processo de adaptação que leva a elevada frequência de falhas, os próximos 5 anos ela falha por causas aleatórias, e os últimos 3 anos a máquina falha por causa de desgaste das peças.

Solução:

(a) Verifique se a função f é realmente a densidade;



Se f é densidade então $\int_0^9 f(x)dx = 1$

$$\begin{aligned}\int_0^9 f(x)dx &= \int_0^1 \frac{1}{3}dx + \int_1^6 \frac{1}{15}dx + \int_6^9 \frac{1}{9}dx\\ &= \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{15}\cdot 5 + \frac{1}{9}\cdot 3 = 1\end{aligned}$$

(b) Calcule a probabilidade de que a máquina falhe durante o período de 5 até 7 anos de uso de máquina;

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(5 \leq X \leq 7) &= \int_5^7 f(x)dx\\ &= \frac{1}{15}\cdot 1 + \frac{1}{9}\cdot 1 = \frac{8}{45}\end{aligned}$$

(c) Sabendo que a máquina funcionou 5 anos. Qual é a probabilidade de que ela vai funcionar durante próximos dois anos.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geq 7|X > 5) &= \frac{\mathbb{P}(X \geq 7, X > 5)}{\mathbb{P}(X > 5)}\\ &= \frac{\mathbb{P}(X \geq 7)}{\mathbb{P}(X > 5)}\\ &= \frac{\frac{2}{9}}{\frac{1}{15}\cdot 1 + \frac{1}{9}\cdot 3} = \frac{10}{21}\end{aligned}$$

(d) Calcule a função de taxa de falha $r(t)$ de X.

$$r(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)}$$

$$r(t)=\begin{cases}\dfrac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}\cdot t}=\dfrac{1}{3-t} & \text{se } 0<t\leq 1 \text{ ano;}\\ \dfrac{\frac{1}{15}}{1-\left(\frac{1}{3}+\frac{t-1}{15}\right)}=\dfrac{1}{11-t} & \text{se } t\in(1 \text{ ano,}6 \text{ anos];}\\ \dfrac{\frac{1}{9}}{1-\left(\frac{1}{3}+\frac{5}{15}+\frac{t-6}{9}\right)}=\dfrac{1}{9-t} & \text{se } x\in(6 \text{ anos,}9 \text{ anos];}\end{cases}$$

Exercício 3

Seja $U\sim U[0,1]$. Achar a distribuição de $Z=\ln(U)$ e calcular a função taxa de falha dela.

Solução:

$$F_Z(t)=\mathbb{P}\left(\ln(U)\leq t\right)=\mathbb{P}(U\leq e^t)=\begin{cases} e^t, & \text{se } t<0,\\ 1, & \text{se } t\geq 0.\end{cases}$$

a densidade de Z é

$$f_Z(t)=(F_Z(t))'=\begin{cases} e^t, & \text{se } t<0,\\ 0, & \text{se } t\geq 0.\end{cases}$$

A função taxa de falha é portanto:

$$r(t)=\frac{f(t)}{1-F(t)}=\begin{cases}\dfrac{e^t}{1-e^t}, & \text{se } t<0,\\ 0, & \text{se } t\geq 0.\end{cases}$$

Exercício 4

Seja $X\sim exp(\lambda)$, achar função de distribuição acumulada de

Solução:

(a) $Z=\ln(X)$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\ln(X)\leq t)&=\mathbb{P}(X\leq e^t)\\ &=\int_0^{e^t}\lambda e^{-\lambda x}dx=1-e^{-\lambda e^t},\quad t\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

(b) $Z=e^X$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(e^X\leq t)&=\mathbb{P}(X\leq\ln(t))\\ &=\int_0^{\ln(t)}\lambda e^{-\lambda x}\cdot\mathbb{1}_{\ln(t)\in[0,\infty]}dx\\ &=1-e^{-\lambda\ln(t)},\quad t\geq 1,\\ &=1-t^{-\lambda},\quad t\geq 1.\end{aligned}$$

Exercício 5

Um pouco reformulamos problema que foi resolvida na aula. Suponha que você entrou numa estação de metrô para comprar passagem. Metrô possui três caixas e todas são ocupadas. Você comprará a passagem no primeiro caixa que ficar livre. Suponha que o tempo de compra de uma passagem para um passageiro tem distribuição exponencial com a média de 1 min. Qual é a probabilidade de você ser o último a sair das caixas (entre quatro pessoas envolvidas, você e as outras duas pessoas que estão comprando os bilhetes nas caixas quando você entrou)?

Solução:

No momento que um dos caixas fica livre, devido a propriedade de falta de memória da exponencial, o tempo dos outros atendimentos até o momento que sou atendido não importa. Portanto no momento quando eu estou atendido na caixa temos 3 exponenciais independentes com o mesmo parâmetro. Assim, a probabilidade de eu ficar por ultimo é a probabilidade da minha exponencial seja maior de que outras duas, o que leva resposta um terço.

Ou o mesmo pode ser calculado de seguinte forma. Seja T_1, T_2, T_3 os tempos de atendimento de cada caixa e suponha sem perda de generalidade que o serei atendido no caixa 3, ou seja, o meu tempo de atendimento é T_3, então

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(T_3 > T_1, T_3 > T_2) &= \mathbb{P}(max(T_1, T_2) < T_3) \\
&= \int_0^\infty \mathbb{P}(max(T_1, T_2) < T_3 | T_3 = t) \cdot f_T(t) dt \\
&= \int_0^\infty (1 - e^{-t})^2 \cdot e^{-t} dt \\
&= \int_0^\infty (1 - 2e^{-t} + e^{-2t}) \cdot e^{-t} dt \\
&= \int_0^\infty e^{-t} - 2e^{-2t} + e^{-3t} dt \\
&= 1 - 1 + \frac{1}{3} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$