Aula 3. Distribuição Exponencial e suas propriedades.

Uma variável contínua X tem distribuição exponencial com parâmetro $\lambda > 0$ se sua densidade é dada por

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases} \tag{1}$$

A função de distribuição (distribuição acumulada) associada fica dada por

$$F(x) = P\{X \leq x\} = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases} \tag{2}$$

A média e segundo momento são

$$E[X] = \int_0^\infty \lambda x e^{-\lambda x} dx = -xe^{-\lambda x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} \tag{3}$$

e

$$E[X^2] = \int_0^\infty \lambda x^2 e^{-\lambda x} dx = -x^2 e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty 2x e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda}\int_0^\infty \lambda x e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^2}. \tag{4}$$

Logo, usando (3) e (4) obtemos a variância:

$$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = 2/\lambda^2 - (1/\lambda)^2 = 1/\lambda^2. \tag{5}$$

Dizemos que uma variável aleatória X não tem memória se

$$P\{X > s + t \mid X > s\} = P\{X > t\} \text{ para todos } s, t \geq 0. \tag{6}$$

Esta propriedade destaca a distribuição exponencial entre outras distribuições. Provamos agora que uma variável aleatória com distribuição exponencial não tem memória. Para isso, reescrevemos a propriedade (6) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} &P\{X > s+t \mid X > s\} = \frac{P\{X > s+t, X > s\}}{P\{X > s\}} = P\{X > s\} \\ &\to P\{X > s+t, X > s\} = P\{X > s+t\} = P\{X > s\}P\{X > t\}. \end{aligned} \tag{7}$$

Usando (2), obtemos que para qualquer variável exponencial $P\{X > t\} = 1 - P\{X \leq t\} = e^{-\lambda x}$ e logo

$$e^{-\lambda(s+t)} = e^{-\lambda s} e^{-\lambda t}.$$

O que prova a propriedade de "ausência de memória"para variáveis com distribuição exponencial.

Naturalmente, podemos perguntar: será que existe uma outra distribuição (que não seja a exponencial) que possui a mesma propriedade de "falta da memória"? A resposta é não. Somente a distribuição exponencial possui esta propriedade (6). Para mostrar isso, suponha que uma variável X satisfaz (6,7). Seja $\bar{F}(x) = P\{X > x\}$. Então, por (7), $\bar{F}(x)$ tem que satisfazer

$$\bar{F}(s+t) = \bar{F}(s)\bar{F}(t).$$

Então, $\bar{F}(t)$ tem que satisfazer à seguinte equação funcional:

$$g(s+t) = g(s)g(t).$$

Mas, a única solução contínua à direita é:

$$g(x) = e^{-\lambda x}.$$

Por isso,

$$\bar{F}(x) = e^{-\lambda x} \text{ ou } \quad F(x) = P\{X \leq x\} = 1 - e^{-\lambda x}.$$

O que significa que X tem distribuição exponencial.

Ex. 1. A duração de vida de uma lâmpada distribuição exponencial com média igual a 10 meses, ou com a intensidade $\lambda = 1/10$. Qual é a probabilidade de que a lâmpada dure mais do que 15 meses? Qual é a probabilidade de que ela dure mais do que 15 meses, se depois de 10 meses, ela ainda está funcionando?

Solução. Seja X o tempo de vida da lâmpada. Então,

$$P\{X > 15\} = e^{-15\lambda} = e^{-3/2} \simeq 0.220.$$

Para responder a segunda pergunta, precisamos lembrar que o tempo de vida de lâmpada possue a propriedade de "ausência de memória", por isso, sabendo que a lâmpada já durou 10 meses, o resto da vida dela tem distribuição exponencial de novo, com o mesmo parâmetro λ. A pergunta pode ser reformulada da seguinte forma: qual é a probabilidade de que a lâmpada dure mais 5 meses, sabendo que ela já durou 10 meses? Então, em vez de calcular a probabilidade condicional, precisamos calcular a simples probabilidade

$$P\{X > 5\} = e^{-5\lambda} = e^{-1/2} \simeq 0.604.$$

□

Ex. 2. Suponha que você entrou numa estação de metrô para comprar passagem. O metrô possui dois caixas e eles estão ocupados. Você comprará a passagem no primeiro caixa que ficar livre. Suponha que o tempo de compra de uma passagem para um passageiro tem distribuição exponencial. Qual é a probabilidade de você ser o último a sair dos caixas (existem três pessoas envolvidas, você e os outras duas pessoas que estão comprando os bilhetes nos caixas)?

Solução. O raciocínio pode ser o seguinte. No momento que um caixa ficou livre, seu tempo de compra e o tempo de compra para a outra pessoa que ainda está comprando a passagem, têm distribuições exponenciais, com o mesmo parâmetro (pelo propriedade de "falta da memória"). Por isso, a probabilidade de que você vai ser o último a sair dos caixas é igual a 1/2. □

Ex. 3. Como no exercício 1, suponha que o tempo de funcionamento de uma lâmpada elétrica tem distribuição exponencial. Suponha que a média deste tempo é igual a dez horas. Uma pessoa entra em uma sala com luz acesa. A pessoa quer trabalhar na sala durante 5 horas. Qual é a probabilidade de que ela consiga trabalhar durante todo este tempo com a luz acesa? O que podemos dizer sobre esta probabilidade quando a distribuição do tempo de vida de lâmpada não é exponencial?

Solução. Pelo propriedade de "falta da memória", a distribuição do tempo de luz acesa é exponencial com a mesma média, cujo valor é de 10 horas. Por isso, a resposta é

$$P\{\text{ resto do tempo da vida da lâmpada } > 5\} = 1 - F(5) = e^{-5\lambda} = e^{-1/2}.$$

Se a distribuição não é exponencial, a probabilidade desejada é

$$P\{\text{ tempo de vida } > t+5 \mid \text{ tempo da vida } > t\} = \frac{1-F(t+5)}{1-F(t)},$$

onde t é o tempo de funcionamento da lâmpada antes da pessoa entrar na sala. Por isso, para calcular esta probabilidade junto com a informação sobre a distribuição do tempo de vida da lâmpada, nós vamos precisar saber quanto tempo a lâmpada foi usada. □

Seja X uma variável contínua com função de distribuição (distribuição acumulada) F e densidade f. A taxa de falha, denotada por $r(t)$, é definida pela fórmula seguinte:

$$r(t) = \frac{f(t)}{1-F(t)}. \tag{8}$$

Para interpretação, vamos supor a variável X é o tempo de funcionamento de um sistema. Suponha que o sistema estava funcionando durante t horas. Queremos saber a probabilidade de que este sistema falhe durante o próximo tempo adicional dt :

$$P\{X \in (t, t+dt) \mid X > t\} = \frac{P\{X \in (t, t+dt), X > t\}}{P\{X > t\}} = \frac{P\{X \in (t, t+dt)\}}{P\{X > t\}} \simeq \frac{f(t)dt}{1-F(t)} = r(t)dt.$$

Isso significa que $r(t)$ representa a densidade de distribuição condicional de tempo de vida de um sistema com a "idade"t. Para a distribuição exponencial, lembrando a propriedade de "ausência de memória", esperamos que a taxa de falha de um sistema com idade t e a taxa de falha de um sistema "recém-nascido"deveriam ser os mesmos, então $r(t)$ deve ser constante. Acharemos esta constante:

$$r(t) = \frac{f(t)}{1-F(t)} = \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} = \lambda.$$

Notamos que a função de falha determina a função de distribuição F singularmente. Para mostrar isso, re-escrevemos a fórmula (8) do seguinte modo:

$$r(t) = \frac{\frac{dF(t)}{dt}}{1 - F(t)}.$$

Integrando as duas partes de equação, obtemos:

$$ln(1 - F(t)) = -\int_0^t r(s)ds + C \to 1 - F(t) = e^C \exp\Big\{-\int_0^t r(s)ds\Big\}.$$

Colocando $t = 0$, logo acharemos que a constante C é igual a zero. Assim,

$$F(t) = 1 - \exp\Big\{-\int_0^t r(s)ds\Big\}.$$

Ex. 4. Suponha que numa caixa tem n diferentes tipos de pilhas. Suponha também que p_j é a proporção de pilhas do tipo j na caixa. X_j é o tempo de funcionamento da pilha do tipo j. Suponha que X_j tem distribuição exponencial com média $1/\lambda_j$. Escolhemos ao acaso uma pilha da caixa. Qual é a distribuição do tempo de funcionamento da pilha escolhida?

Solução. Primeiro, notamos que as proporções tem que satisfazer a seguinte equação:

$$\sum_{j=1}^{n} p_j = 1.$$

Seja N uma variável com distribuição $P\{N = j\} = p_j, j = 1, \ldots, n$. A variável N representa o número do tipo de pilha escolhida. Seja $f_j(t)$ a densidade do tempo de vida da pilha do tipo j. Seja X_N o tempo de funcionamento da pilha escolhida. Condicionando pelo valores da variável N, obtemos a seguinte fórmula para a densidade de X_N :

$$f(t) = f_N(t) = \sum_{j=1}^{n} f_N(t|N = j)p_j = \sum_{j=1}^{n} f_j(t)p_j = \sum_{j=1}^{n} p_j\lambda_j e^{-\lambda_j t}.$$

□ A distribuição obtida neste exercício chama-se a distribuição hiper-exponencial. Temos que

$$1 - F(t) = \int_t^{\infty} f(s)ds = \sum_{j=1}^{n} p_j e^{-\lambda_j t}.$$

Logo, a função de risco desta distribuição fica dada por

$$r(t) = \frac{\sum_{j=1}^{n} p_j\lambda_j e^{-\lambda_j t}}{\sum_{j=1}^{n} p_j e^{-\lambda_j t}}.$$

Ex. 5. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, seguindo distribuição exponencial com média $1/\lambda$. Prove que a soma $X_1 + \cdots + X_n$ tem distribuição gama com parâmetros n e λ,, cuja densidade é dada por

$$f_{X_1+\cdots+X_n}(t) = \lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}. \tag{9}$$

Solução. Vamos provar este fato usando indução matemática. É facil ver que o caso $n = 1$ satisfaz a equação (9). Agora assumimos que a densidade da soma $X_1 + \cdots + X_{n-1}$ é dada por

$$f_{X_1+\cdots+X_{n-1}}(t) = \lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-2}}{(n-2)!}.$$

Provaremos que para a soma $X_1 + \cdots + X_{n-1} + X_n$ a equação (9) é válida. Temos que

$$\begin{aligned} f_{X_1+\cdots+X_{n-1}+X_n}(t) &= \int_0^{\infty} f_{X_n}(t-s)f_{X_1+\cdots+X_{n-1}}(s)ds = \int_0^t \lambda e^{-\lambda(t-s)}\lambda e^{-\lambda s}\frac{(\lambda s)^{n-2}}{(n-2)!}ds \\ &= \lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \end{aligned}$$

. □

Ex. 6. Sejam X_1 e X_2 duas variáveis aleatórias independentes com as distribuições exponenciais com parâmetros λ_1 e λ_2, respectivamente. Calcule a probabilidade $P\{X_1 < X_2\}$.

Solução. Temos que

$$\begin{aligned} P\{X_1 < X_2\} &= \int_0^\infty P\{X_1 < X_2 \mid X_1 = x\}\lambda_1 e^{-\lambda_1 x}dx = \int_0^\infty P\{x < X_2\}\lambda_1 e^{-\lambda_1 x}dx \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda_2 x}\lambda_1 e^{-\lambda_1 x}dx = \int_0^\infty \lambda_1 e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x}dx = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}. \end{aligned}$$

□

Exercícios domésticos.

1. Consideramos um correio com dois funcionários. Suponha que três pessoas A, B e C entram no correio. A e B foram as primeiras atendidas e C ficou esperando. Qual é a probabilidade de que A estará no correio quando B e C já foram embora se
   (a) o tempo de atendimento de cada funcionário é exatamente 10 minutos?
   (b) o tempo de atendimento é igual a i com a probabilidade $1/3$, $i = 1, 2, 3.$?
   (c) o tempo de atendimento é exponencial com média $1/\mu$?

   Qual é a distribuição do tempo de espera da pessoa C se o tempo de atendimento dos funcionários do correio
   (a) são independentes e identicamente distribuídos com a distribuição exponencial com média $1/\lambda$?
   (b) são independentes com as distribuições exponenciais com parâmetros λ_1 e λ_2 para os funcionários 1 e 2, respectivamente?
2. O tempo de funcionamento de um rádio tem distribuição exponencial com média de 10 anos. O João comprou o rádio que já foi usado 10 anos. Qual é a probabilidade de que o rádio funcione mais 10 anos?
3. Um aparelho contém duas partes - o DVD e o microfone. O tempo de vida útil do DVD tem distribuição exponencial com média de 1000 horas e o tempo de vida útil do microfone é exponencial com média de 500 horas de uso. O aparelho falha se o DVD ou o microfone falhe. Qual é a probabilidade de que o sistema falhará por causa da falha do DVD?
4. Sejam X_1, X_2 e X_3 variáveis aleatórias independentes com distribuição exponencial com médias $1/\lambda_1$, $1/\lambda_2$ e $1/\lambda_3$ respectivamente. calcule:
   (a) $P(max\{X_1, X_2, X_3\} \leq x)$(distribuição do máximo).
   (b) $P(min\{X_1, X_2, X_3\} \leq x)$(distribuição do mínimo).
   (c) $E(max\{X_1, X_2, X_3\})$.
5. Considere um aparelho com n componentes, cada um possuindo tempo de vida exponencial de média $1/\lambda_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$. Calcule a probabilidade do componente 1 ser o primeiro a falhar entre todos os componentes.
6. Exercícios 18, 24(a,b) do capítulo 5 do livro [1].

Referências

[1] S.M.Ross *Introduction to probability models.* Ninth Edition. Elsevier. 2007