Lista 2. Distribuições condicionais: Caso contínuo.

Exercício 1. A distribuição (densidade) conjunta de X e Y é:

$$f(x,y) = aye^{-yx}e^{-y}, \quad 0 < x < \infty, 0 < y < \infty.$$

Para que $f(x,y)$ seja realmente a densidade achar o valor numérico do coeficiente a. Calcule $E[X|Y=y]$.

Exercício 2. Sejam X e Y variáveis contínuas com distribuição conjunta $f(x,y)$

$$f(x,y) = e^{-(x+y)}, \quad 0 < x < \infty, \quad 0 < y < \infty.$$

1. Achar $P(0 \leq X \leq 2)$.
2. Achar $P(0 \leq X + Y \leq 2)$.
3. Qual é a distribuição de $E(X \mid Y)$? (X e Y são independentes?)

Exercício 3. A densidade conjunta de X e Y é:

$$f(x,y) = c(x+y), \; x, y \in [0,1].$$

1. Achar c.
2. Achar densidades marginais $f_X(x)$ e $f_Y(y)$.
3. Variáveis X, Y são independentes? Justifique.
4. Achar que $E[X \mid Y = y]$.

Exercício 4. Um ponto é escolhido aleatoriamente no quadrado $Q = \{(x,y) : \; |x| + |y| \leq 1\}$. Sejam (X,Y) as coordenadas desse ponto. Isso significa que a densidade conjunta é

$$f(x,y) = \begin{cases} c & \text{se } (x,y) \in Q; \\ 0 & \text{se } (x,y) \notin Q. \end{cases}$$

1. Achar value c.
2. Achar distribuições marginais f_X e f_Y.
3. Usando item anterior reponder: as variáveis aleatórias X e Y são independentes?
4. Encontre a densidade de X dado que $Y = 1/2$.
5. * Encontre a densidade de X dado que $X + Y = 1/2$.

Exercício 5. (*Wiki: "In applied statistics, the Marshall–Olkin exponential distribution is any member of a certain family of continuous multivariate probability distributions with positive-valued components. It was introduced by Albert W. Marshall and Ingram Olkin. One of its main uses is in reliability theory, where the Marshall–Olkin copula models the dependence between random variables subjected to external shocks."*)

Sejam X, Y independentes e tem distribuição exponencial com taxa λ. Seja $T = \min(X,Y)$. Achar $E(T \mid X = x)$.

isso para outros casos: É verdade, que $E(T \mid X = x) = \frac{1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda a})$? e depois conformando, que isso é verdade, achar a média de $E(T)$, usando $E(E(T \mid X))$. Isso vai dar exatamente $1/(2\lambda)$ – a média de minimum of duas exponenciais independentes com taxa λ