Lista 2 - MAE0499 Processos Estocásticos. Gabarito[1]

Exercício 1

A distribuição (densidade) conjunta de X e Y é:

$$f(x,y) = aye^{-yx}e^{-y}, \qquad 0 < x < \infty, 0 < y < \infty.$$

Para que $f(x,y)$ seja realmente a densidade achar o valor numérico do coeficiente a. Calcule $E[X|Y=y]$.

Solução:

1. achar o valor numérico do coeficiente a.

Por definição dizemos que $f(x,y)$ é uma função densidade de probabilidade se satisfaz as seguintes propriedades:

$1:\ f(x,y) \geq 0$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$;

$2:\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1$.

Note que para $x, y \in (0,\infty)$, $f(x,y) \geq 0$, então vale a propriedade 1. Falta verificar a propriedade 2.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy &= \int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} a\cdot ye^{-yx}e^{-y}dxdy \\
&= a\cdot\int_{0}^{\infty} e^{-y}\left[\int_{0}^{\infty} ye^{-yx}dx\right]dy \\
&= a\cdot\int_{0}^{\infty} e^{-y}dy = a\left((-e^{-y})\Big|_0^{\infty}\right) = a
\end{aligned}$$

Portanto $a = 1 \Rightarrow f(x,y)$ é a função densidade de probabilidade.

2. Calcule $E[X|Y=y]$.

Sabemos que $\mathbb{E}[X|Y=y] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x|y)dx$. Então, primeiro, encontraremos a função de densidade condicional:

$$\begin{aligned}
f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f(y)} &= \frac{ye^{-yx}e^{-y}}{\int_0^{\infty} ye^{-yx}e^{-y}dx} \\
&= \frac{ye^{-yx}e^{-y}}{e^{-y}} \\
&= ye^{-yx}
\end{aligned}$$

Assim, a distribuição de X dado $Y=y$ é exponencial com a taxa y, portanto a

$$\mathbb{E}[X|Y=y] = \frac{1}{y},$$

[1] Feito pelo monitor da turma Bruno de Assis Silva e verificado pelo Prof. A.Iambartsev, Abril, 2020

ou com mais calculo

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X|Y=y] &= \int_0^\infty x \cdot ye^{-yx}dx \\ &= \left((x(-e^{-yx}))\Big|_0^\infty - \int_0^\infty (-e^{-yx})dx \right) \\ &= \left(0 + \left(-\frac{e^{-yx}}{y}\right)\Big|_0^\infty \right) = \frac{1}{y}.\end{aligned}$$

Exercício 2

Sejam X e Y variáveis contínuas com distribuição conjunta $f(x,y)$

$$f(x,y) = e^{-(x+y)}, \qquad 0 < x < \infty, \quad 0 < y < \infty.$$

1. Achar $P(0 \leq X \leq 2)$.
2. Achar $P(0 \leq X + Y \leq 2)$.
3. Qual é a distribuição de $E(X \mid Y)$? (X e Y são independentes?)

Solução:

1. Achar $P(0 \leq X \leq 2)$. A função densidade de probabilidade de X é da forma

$$f_X(x) = \int_0^\infty f(x,y)dy = \int_0^\infty e^{-(x+y)}dy = e^{-x} \int_0^\infty e^{-y}dy = e^{-x}$$

Portanto,

$$P(0 \leq X \leq 2) = \int_0^2 e^{-x}dx = (-e^{-x})\Big|_0^2 dx = -e^{-2} + 1 \cong 0.864$$

2. Achar $P(0 \leq X + Y \leq 2)$.

$$\begin{aligned}P(0 \leq X + Y \leq 2) &= P(0 \leq X \leq 2 - Y) \\ &= \int_0^2 \left[\int_0^{2-y} e^{-(x+y)}dx \right] dy = \int_0^2 e^{-y} \left[\int_0^{2-y} e^{-x}dx \right] dy \\ &= \int_0^2 e^{-y} \left(-e^{-(2-y)} + 1 \right) dy = \int_0^2 (-e^{-2} + e^{-y})dy \\ &= -2e^{-2} + (-e^{-2} + 1) = 1 - 3e^{-2} \cong 0.594\end{aligned}$$

3. Qual é a distribuição de $\mathbb{E}(X \mid Y)$? (X e Y são independentes?) Primeiramente, observamos, que X e Y snao variáveis aleatórias independentes. Observe, que no item anterior, item 1, nós já sabemos que a distribuição densidade de X é

$$f_X(x) = e^{-x}, x \geq 0, .$$

ou, seja, X tem distribuição exponencial com a taxa $\lambda = 1$. E da mesma forma podemos achar que

$$f_Y(y) = e^{-y}, y \geq 0,$$

Assim, temos a relação da independencia

$$f(x,y) = e^{-(x+y)} = e^{-x}e^{-y} = f_X(x)f_Y(y),\ \ x,y \geq 0.$$

Significa, que X e Y são independentes.

Por isso, deduzimos, que

$$\mathbb{E}(X \mid Y) = \mathbb{E}(X) = 1,$$

porque a média de exponencial com taxa 1 é igual à 1. Isso termina a solução.

* * *

Mas caso você quer passar pelo calculo sem esse truque barato, então, pode calcular direto:

$$\mathbb{E}[X|Y] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x|y) dx$$

Vamos encontrar $f_{X|Y}(x|y)$:

$$\begin{aligned} f_{X|Y}(x|y) &= \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{e^{-(x+y)}}{\int_0^{\infty} e^{-(x+y)} dx} \\ &= \frac{e^{-(x+y)}}{e^{-y}\int_0^{\infty} e^{-x} dx} = \frac{e^{-(x+y)}}{e^{-y}} = e^{-x} \end{aligned}$$

Portanto :

$$\mathbb{E}[X|Y] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot e^{-x} dx = 1.$$

Lembramos que duas variáveis X e Y são independentes se:

$$f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y).$$

Como $f_X(x) = \int_0^{\infty} e^{-(x+y)} dy = e^{-x}$ e $f_Y(y) = \int_0^{\infty} e^{-(x+y)} dy = e^{-y}$, então:

$$f(x) \cdot f(y) = e^{-x} \cdot e^{-y} = e^{-(x+y)} = f(x,y)$$

Ou seja, X e Y são independentes.

Exercício 3

A densidade conjunta de X e Y é:

$$f(x,y) = c(x+y), \;\; x,y \in [0,1].$$

1. Achar c.
2. Achar densidades marginais $f_X(x)$ e $f_Y(y)$.
3. Variáveis X, Y são independentes? Justifique.
4. Achar $E[X \mid Y=y]$.

Solução:

1. Achar c.

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^1 c(x+y)dxdy &= c\left(\int_0^1 xdx + \int_0^1 ydy\right)\\ &= c\left(\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + \frac{y^2}{2}\Big|_0^1\right) = c\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) = c\end{aligned}$$

Portanto $c = 1$.

2. Achar densidades marginais.

$$\begin{aligned}f_X(x) &= \int_0^1 (x+y)dy = \int_0^1 xdy + \int_0^1 ydy = x\left(y\Big|_0^1\right) + \left(\frac{y^2}{2}\Big|_0^1\right) = \frac{2x+1}{2}\\ f_Y(y) &= \int_0^1 (x+y)dx = \int_0^1 xdx + \int_0^1 ydx = \left(\frac{x}{2}\Big|_0^1\right) + y\left(x\Big|_0^1\right) = \frac{2y+1}{2}.\end{aligned}$$

3. Variáveis X, Y são independentes?
Note que $f(x)\cdot f(y) = \frac{2x+1}{2}\cdot\frac{2y+1}{2} \neq f(x,y)$.

Portanto X e Y não são independentes.

4. Achar $\mathbb{E}(X \mid Y=y)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X|Y=y] &= \int_0^1 x f_{X|Y}(x|y)dx = \int_0^1 x\cdot\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}dx\\ &= \int_0^1 x\cdot\frac{(x+y)}{\frac{2y+1}{2}}dx = \frac{2}{2y+1}\cdot\int_0^1 (x^2+xy)dx\\ &= \frac{2}{2y+1}\left(\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + y\Big(\frac{x^2}{2}\Big|_0^1\Big)\right) = \frac{2}{2y+1}\left(\frac{1}{3}+\frac{y}{2}\right) = \frac{3y+2}{6y+3}\end{aligned}$$

Exercício 4

Um ponto é escolhido aleatoriamente no quadrado $Q = \{(x, y) : \; |x| + |y| \leq 1\}$. Sejam (X, Y) as coordenadas desse ponto. Isso significa que a densidade conjunta é

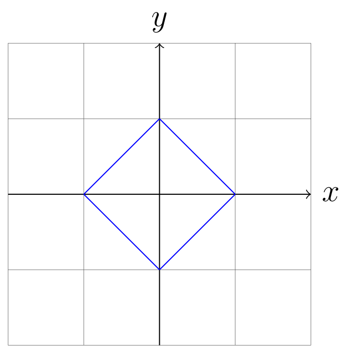
$$f(x, y) = \begin{cases} c & \text{se } (x, y) \in Q; \\ 0 & \text{se } (x, y) \notin Q. \end{cases}$$

1. Achar valor de c.
2. Achar distribuiçãoes marginais f_X e f_Y.
3. Usando item anterior reponder: as variáveis aleatórias X e Y são independentes?
4. Encontre a densidade de X dado que $Y = 1/2$.
5. * Encontre a densidade de X dado que $X + Y = 1/2$.

Solução:

Temos que:

$$Q = \begin{cases} x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0 \\ -x + y \leq 1, x < 0, y \geq 0 \\ x - y \leq 1, x \geq 0, y < 0 \\ -x - y \leq 1, x < 0, y < 0 \end{cases}$$



1. Achar c.

$$1 = \iint_Q c dx dy = c \cdot \text{area de } Q = c \cdot 2$$

Portanto, $c = \frac{1}{2}$.

* * *

O mesmo calculo pode ser feito direto: se $y \in [0, 1]$, então

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y \leq 1, x \geq 0 \Rightarrow x \leq 1 - y \Rightarrow 0 \leq x \leq 1 - y \\ -x + y \leq 1, x < 0 \Rightarrow x \geq y - 1 \Rightarrow y - 1 \leq x \leq 0 \end{array} \right\}$$

Se $y \in [-1, 0]$, então

$$\left\{ \begin{array}{l} x - y \leq 1, x \geq 0 \Rightarrow x \leq 1 + y \Rightarrow 0 \leq x \leq 1 + y \\ -x - y \leq 1, x < 0 \Rightarrow x \geq -y - 1 \Rightarrow -y - 1 \leq x \leq 0 \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} 1 &= c\{\int_0^1 (\int_0^{1-y} 1dx + \int_{y-1}^0 1dx)dy + \int_{-1}^0 (\int_0^{1+y} 1dx + \int_{-y-1}^0 1dx)dy\} \\ &= c\{\int_0^1 1 - y - (y-1)dy + \int_{-1}^0 1 + y - (-y-1)dy\} \\ &= c\{\int_0^1 2 - 2ydy + \int_{-1}^0 2 + 2ydy\} \\ &= 2c \end{aligned}$$

Portanto c $= \frac{1}{2}$

2. Achar distribuições marginais f_X e f_Y.

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{|y| \leq 1 - |x|} \frac{1}{2} dy \\ &= \int_{-1-x}^{1+x} \frac{1}{2} \mathbb{1}_{[-1,0]}(x)dy + \int_{-1+x}^{1-x} \frac{1}{2} \mathbb{1}_{[0,1]}(x)dy \\ &= \frac{1}{2}\left((1+x) - (-x-1)\right) \mathbb{1}_{[-1,0]}(x) + \frac{1}{2}\left((1-x) - (x-1)\right) \mathbb{1}_{[0,1]}(x) \\ &= (1+x)\mathbb{1}_{[-1,0]}(x) + (1-x)\mathbb{1}_{[0,1]}(x) \end{aligned}$$

Ou, em outra formula

$$f_X(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 - x, & \text{se } x \in [0, 1] \\ 1 + x, & \text{se } x \in [-1, 0] \end{array} \right.$$

E de forma análoga, obtemos que:

$$f_Y(y) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 - y, & \text{se } y \in [0, 1] \\ 1 + y, & \text{se } y \in [-1, 0] \end{array} \right.$$

3. X e Y são independentes?

$$f_X(x) \cdot f_Y(y) \neq f(x, y) = \frac{1}{2} \text{ se } x, y \in Q$$

Portanto, X e Y não são independentes.

4. Encontre a densidade de X dado que $Y = \frac{1}{2}$.

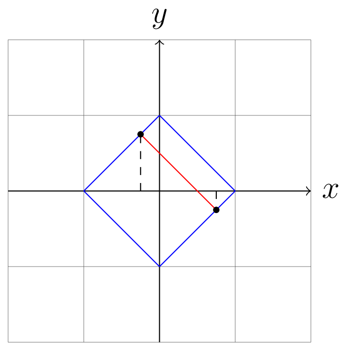
$$f_{X|Y}(X|Y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot \mathbb{1}_Q(x,y)}{[(1-y)\mathbb{1}_{[0,1]}(y) + (1+y)\mathbb{1}_{[-1,0]}(y)]}$$

Como Y=$\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} f_{X|Y}(X|Y=\frac{1}{2}) &= \frac{f(x,\frac{1}{2})}{f_Y(\frac{1}{2})} \\ &= \frac{\frac{1}{2}\cdot \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(x)}{[(1-\frac{1}{2})\mathbb{1}_{[0,1]}(\frac{1}{2}) + 0]} \\ &= \frac{\frac{1}{2}\cdot \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(x)}{\frac{1}{2}} = \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(x) \end{aligned}$$

5*. Encontre a densidade de X dado que $X + Y = \frac{1}{2}$.

Observe: $X + Y = \frac{1}{2} \Rightarrow Y = \frac{1}{2} - X$



Pelo gráfico, X tem distribuição uniforme no intervalo da reta vermelha. Os pontos podem que tocam a borda do quadrado podem ser encontrados da seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y - \frac{1}{2} = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x = \frac{3}{4}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y - \frac{1}{2} = 0 \\ -x + y - 1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x = \frac{-1}{4}$$

Portanto $X \sim Uniforme(-\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$

Exercício 5

(*Wiki: "In applied statistics, the Marshall–Olkin exponential distribution is any member of a certain family of continuous multivariate probability distributions with positive-valued components. It was introduced by Albert W. Marshall and Ingram Olkin. One of its main uses is in reliability theory, where the Marshall–Olkin copula models the dependence between random variables subjected to external shocks."*)

Sejam X, Y independentes e tem distribuição exponencial com taxa λ. Seja $T = \min(X, Y)$. Achar $\mathbb{E}(T \mid X = x)$.

Solução:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(T|X = x) &= \int_0^\infty min(t, x) \cdot \lambda e^{-\lambda t} dt \\
&= \int_0^x t\lambda e^{-\lambda t} dt + \int_x^\infty x\lambda e^{-\lambda t} dt \\
&= \left(t(-e^{-\lambda t})\Big|_0^x - \int_0^x (-e^{-\lambda t}) dt \right) + x \left((-e^{-\lambda t})\Big|_x^\infty \right) \\
&= -xe^{-\lambda x} - \left(\frac{1}{\lambda} \cdot e^{-\lambda t}\Big|_0^x \right) + xe^{-\lambda x} \\
&= -xe^{-\lambda x} - \frac{e^{-\lambda x} - 1}{\lambda} + xe^{-\lambda x} = \frac{1 - e^{-\lambda x}}{\lambda}
\end{aligned}$$

O que finaliza a solução.

Sabemos que a distribuição de $T = \min(X, Y)$ é exponencial com a taxa 2λ. Verificamos isso, usando a formula anterior.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(T) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(T|X)) \\
&= \mathbb{E}\left(\frac{1 - e^{-\lambda X}}{\lambda} \right) = \frac{1}{\lambda} \mathbb{E}(1 - e^{-\lambda X}) \\
&= \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda x}) \lambda e^{-\lambda x} dx \\
&= \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} dx - \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty \lambda e^{-2\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2\lambda} = \frac{1}{2\lambda}
\end{aligned}$$