Lista 2. Distribuições condicionais: Caso contínuo.

Exercício 1. [1]. A distribuição (densidade) conjunta de X e Y é:

$$f(x,y) = aye^{-yx}e^{-y}, \quad 0 < x < \infty, 0 < y < \infty.$$

Para que $f(x,y)$ seja realmente a densidade achar o valor numérico do coeficiente a. Calcule $E[X|Y=y]$.

Exercício 2. [1]. Sejam X e Y variáveis contínuas com distribuição conjunta $f(x,y)$. Mostre que $E[E[X \mid Y]] = E[X]$.

Exercício 3. [1]. A densidade conjunta de X e Y é:

$$f(x,y) = \frac{(y^2 - x^2)}{8}e^{-y}, \ 0 < y < \infty, \ -y \leq x \leq y.$$

1. Achar densidades marginais $f_X(x)$ e $f_Y(y)$.
2. Variáveis X, Y são independentes? Justifique.
3. Mostre que $E[X \mid Y = y] = 0$.

Exercício 3. [1]. Um ponto é escolhido aleatoriamente no quadrado $Q = \{(x,y) : \ |x| + |y| \leq 1\}$. Sejam (X,Y) as coordenadas desse ponto.

1. As variáveis aleatórias X e Y são independentes?
2. Encontre a densidade de X dado que $X + Y = 1/2$.

Exercício 4. [1]. O intervalo (0,1) é dividido por um ponto uniformemente distribuído no intervalo (0,1). Dado $x \in (0,1)$, ache a média do comprimento do subintervalo que contém o ponto x. Mostre que essa média atinge o valor máximo quando $x = 1/2$.

Exercício 5. [2]. Seja Ω a área no plano composta de um polígono com vértices $(0,0),(1,1),(0,\frac{1}{2}),(\frac{1}{2},1)$ e de um triângulo com vértices $(\frac{1}{2},0),(1,0),(1,\frac{1}{2})$. Seja o par (X,Y) distribuído uniformemente em Ω. Prove que as distribuições marginais de X e de Y são uniformes. Além disso, calcule a distribuição de $X+Y$.

Referências

[1] S.M.Ross (1997) *Introduction to probability models.* Chapter 3.

[2] W.Feller (1968) *An introduction to probability theory and its applications.* Vol 1.