

Lista 2. Distribuições condicionais: Caso contínuo.

Exercício 1. [1]. A distribuição (densidade) conjunta de X e Y é:

$$f(x, y) = \frac{e^{-x/y} e^{-y}}{y}, \quad 0 < x < \infty, 0 < y < \infty$$

Mostre que $E[X|Y = y] = y$.

Exercício 2. [1]. Sejam X e Y variáveis contínuas independentes. Mostre que $E[X | Y = y] = E[X]$.

Exercício 3. [1]. A densidade conjunta de X e Y é:

$$f(x, y) = \frac{(y^2 - x^2)}{8} e^{-y}, \quad 0 < y < \infty, -y \leq x \leq y.$$

Mostre que $E[X | Y = y] = 0$.

Exercício 3. [1]. Um ponto é escolhido aleatoriamente no quadrado $Q = \{(x, y) : |x| + |y| \leq 1\}$. Sejam (X, Y) as coordenadas desse ponto.

1. As variáveis aleatórias X e Y são independentes?
2. Encontre a densidade de X dado que $Y = y$.

Exercício 4. [1]. O intervalo $(0,1)$ é dividido por um ponto uniformemente distribuído no intervalo $(0,1)$. Dado $x \in (0, 1)$, ache a média do comprimento do subintervalo que contém o ponto x . Mostre que essa média atinge o valor máximo quando $x = 1/2$.

Exercício 5. [2]. Seja Ω a área no plano (área igual a $1/2$) composta de um polígono com vértices $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(0, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, 1)$ e de um triângulo com vértices $(\frac{1}{2}, 0)$, $(1, 0)$, $(1, \frac{1}{2})$. Seja o par (X, Y) distribuído uniformemente em Ω . Prove que as distribuições marginais de X e de Y são uniformes. Além disso, calcule a distribuição de $X + Y$.

Referências

[1] S.M.Ross (1997) *Introduction to probability models*. Chapter 3.

[2] W.Feller (1968) *An introduction to probability theory and its applications*. Vol 1.