Aula 2. Distribuições condicionais: Caso contínuo.

Sejam X e Y variáveis aleatórias contínuas com densidade conjunta dada por $f(x,y)$. A *densidade condicional de* X *dado que* $Y=y$ é definida, para todos os valores de y tais que $f_Y(y)>0$, pela seguinte fórmula:

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}. \tag{1}$$

Motivação:

$$f_{X|Y}(x|y)dx=\frac{f(x,y)dxdy}{f_Y(y)dy}=\frac{P\{x\le X\le x+dx,y\le Y\le y+dy\}}{P\{y\le Y\le y+dy\}}=P\{x\le X\le x+dx|y\le Y\le y+dy\}.$$

Para memorizar a primeira igualdade acima, basta lembrarmos da definição de probabilidade condicional:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}.$$

A *esperança condicional de* X *dado que* $Y=y$ é definida, para todos os valores de y tais que $f_Y(y)>0$, pela fórmula:

$$E[X|Y=y]=\int_{-\infty}^{\infty}xf_{X|Y}(x|y)dx \tag{2}$$

Ex. 1. Suponha que a densidade conjunta de X e Y é :

$$f(x,y)=\begin{cases}6xy(2-x-y), & 0<x<1,0<y<1\\ 0, & \text{em caso contrário.}\end{cases}$$

Calcule a esperança condicional da variável X dado $Y=y$, onde $0<y<1$.

Solução. Primeiro obtemos a densidade condicional pela fórmula (1):

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{6xy(2-x-y)}{\int_0^1 6xy(2-x-y)dx}=\frac{6xy(2-x-y)}{y(4-3y)}=\frac{6x(2-x-y)}{(4-3y)}.$$

Agora, usando a fórmula (2) obtemos a esperança condicional:

$$E[X|Y=y]=\int_0^1\frac{6x^2(2-x-y)dx}{4-3y}=\frac{2(2-y)-6/4}{4-3y}=\frac{5-4y}{8-6y}.$$

□

Ex. 2. A densidade conjunta de X e Y é: dada por

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}ye^{-xy}, & 0<x<\infty,0<y<2\\ 0, & \text{em caso contrário}\end{cases}$$

Calcule $E[e^{X/2}|Y=1]$.

Solução. A densidade condicional pela fórmula (1) é

$$f_{X|Y}(x|1)=\frac{f(x,1)}{f_Y(1)}=\frac{e^{-x}/2}{\int_0^\infty e^{-x}/2dx}=e^{-x}.$$

Logo, a esperança condicional fica dada por:

$$E[e^{X/2}|Y=1]=\int_0^\infty e^{x/2}f_{X|Y}(x|1)dx=\int_0^\infty e^{x/2}e^{-x}dx=2.$$

□

Denotamos por $E[X|Y]$ uma função da variável aleatória Y cujo valor é $E[X|Y=y]$, quando $Y=y$. Note que $E[X|Y]$ é uma variável aleatória. Uma propriedade dessa variável é que para quaisquer X e Y, segue a igualdade

$$E[E[X|Y]] = E[X], \tag{3}$$

desde que a esperança de X esteja bem definida. Para variáveis discretas, a fórmula (3) pode ser representada da seguinte forma:

$$E[X] = \sum_y E[X|Y=y]P\{Y=y\}, \tag{4}$$

enquanto para o caso contínuo:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} E[X|Y=y]f_Y(y)dy. \tag{5}$$

Ex. 3. Sejam X e Y variáveis contínuas e independentes com densidades $f_X(x)$ e $f_Y(y)$, respectivamente. Calcule a probabilidade $P\{X<Y\}$.

Solução. Usando a probabilidade condicional do evento dado o $Y=y$, obtemos:

$$\begin{aligned} P\{X<Y\} &= \int_{-\infty}^{\infty} P\{X<Y \mid Y=y\}f_Y(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} P\{X<y \mid Y=y\}f_Y(y)dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} P\{X<y\}f_Y(y)dy = \int_{-\infty} F_X(y)f_Y(y)dy, \end{aligned}$$

em que

$$F_X(y) = \int_{-\infty}^{y} f_X(x)dx.$$

□

Ex. 4. Sejam X e Y variáveis aleatórias contínuas e independentes. Encontre a função de distribuição da variável $Z=X+Y$.

Solução. Condicionando em $Y=y$, obtemos

$$\begin{aligned} P\{X+Y<z\} &= \int_{-\infty}^{\infty} P\{X+Y<z \mid Y=y\}f_Y(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} P\{X+y<z \mid Y=y\}f_Y(y)dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} P\{X<z-y\}f_Y(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} F_X(z-y)f_Y(y)dy. \end{aligned}$$

□

Ex. 5. Sejam $U_1, U_2, \dots$ uma seqüência de variáveis aleatórias independentes uniformemente distribuidas no intervalo $(0,1)$. Seja

$$N = \min\{n \geq 2 : U_n > U_{n-1}\} \text{ e } M = \min\{n \geq 1 : U_1 + \cdots + U_n > 1\}.$$

Prove que N e M têm a mesma distribuição e a média deles é igual à e.

Solução. Achamos a distribuição de N. Notamos que todas as ordenações das n primeiras variáveis tem a mesma chance de ocorrer. Com isso, temos que

$$P\{N>n\} = P\{U_1 > U_2 > \cdots > U_n\} = 1/n!.$$

Agora, calcularemos a distribuição da variável aleatória $M(x)$, em que

$$M(x) = \min\{n \geq 1 : U_1 + \cdots + U_n > x\}, \quad \text{onde } 0 < x \leq 1.$$

Quando $x=1$, temos $M(x)=M$. Provamos, usando indução, que $P\{M(x)>n\} = x^n/n!$. Para $n=1$, temos $P\{M(x)>1\} = P\{U_1 \leq x\} = x$. Suponha que para qualquer $x \in (0,1]$, temos $P\{M(x)>n\} = x^n/n!$. Calculamos a probabilidade $P\{M(x)>n+1\}$ condicionando em U_1 :

$$P\{M(x)>n+1\} = \int_0^1 P\{M(x)>n+1 \mid U_1=y\}dy = \int_0^x P\{M(x)>n+1 \mid U_1=y\}dy$$
$$= \int_0^x P\{M(x-y)>n\}dy = \text{ pela indução } = \int_0^1 \frac{(x-y)^n}{n!}dy = \int_0^x \frac{u^n}{n!}du = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Logo, para qualquer $x \in (0,1]$ e $n \geq 1$, temos que $P\{M(x) > n\} = x^n/n!$. Se $x = 1$, temos que as variáveis N e M têm a mesma distribuição. Finalmente,

$$E[M] = E[N] = \sum_{n=0}^{\infty} P\{N > n\} = \sum_{n=0}^{\infty} 1/n! = e.$$

□

Exercícios domésticos.

1. [1] A distribuição (densidade) conjunta de X e Y é:

$$f(x,y) = \frac{e^{-x/y}e^{-y}}{y}, \qquad 0 < x < \infty, 0 < y < \infty$$

   Mostre que $E[X|Y = y] = y$.

2. [1] Sejam X e Y variáveis contínuas independentes. Mostre que $E[X \mid Y = y] = E[X]$.

3. [1] A densidade conjunta de X e Y é:

$$f(x,y) = \frac{(y^2 - x^2)}{8} e^{-y}, \; 0 < y < \infty, \; -y \leq x \leq y.$$

   Mostre que $E[X \mid Y = y] = 0$.

4. Um ponto é escolhido aleatoriamente no quadrado $Q = \{(x,y) : \; |x| + |y| \leq 1\}$. Sejam (X,Y) as coordenadas desse ponto.
   (a) As variáveis aleatórias X e Y são independentes?
   (b) Encontre a densidade de X dado que $Y = y$.

5. [1] O intervalo (0,1) é dividido por um ponto uniformemente distribuído no intervalo (0,1). Dado $x \in (0,1)$, ache a média do comprimento do subintervalo que contém o ponto x. Mostre que essa média atinge o valor máximo quando $x = 1/2$.

6. [2] Seja Ω a área no plano (área igual a 1/2) composta de um polígono com vértices $(0,0), (1,1), (0, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, 1)$ e de um triângulo com vértices $(\frac{1}{2}, 0), (1,0), (1, \frac{1}{2})$. Seja o par (X,Y) distribuído uniformemente em Ω. Prove que as distribuições marginais de X e de Y são uniformes. Além disso, calcule a distribuição de $X + Y$.

7. [2] Seja $a > 0$ e:

$$f(x,y) = \begin{cases} [(1+ax)(1+ay) - a]e^{-x-y-axy}, & \text{se } x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

   (a) Prove que $f(x,y)$ é uma densidade conjunta de um par (X,Y). Encontre as densidades marginais.
   (b) Encontre a densidade condicional de Y dado $X = x$, $E[Y|X = x]$ e $Var[Y|X]$.

8. Um par (X,Y) é uniformemente distribuído em um retângulo:

$$Q = \{(x,y) : \; |x| \leq 2, |y| \leq 1\}.$$

   (a) Ache a densidade condicional de X dado que $Y = 1/2$.
   (b) Ache a distribuição de $E[X|Y]$.
   (c) Calcule a média condicional $E[X|X + Y = a]$.

Referências

[1] S.M.Ross (1997) *Introduction to probability models.* Chapter 3.

[2] W.Feller (1968) *An introduction to probability theory and its applications.* Vol 1.